

Содержание

<i>Кирова В.О.</i> Кольца формальных матриц со свойством инволюции.....	6
<i>Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А.</i> Об эндоморфизмах p -группы ранга 3	18
<i>Акчина С.С., Перминов В.А.</i> Математическое моделирование зажигания лесных горючих материалов лучистым тепловым потоком в многоярусном массиве	29
<i>Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е.</i> Математическое моделирование течения закрученного потока жидкости Балкли-Гершеля в цилиндрическом канале	38
<i>Коржова А.Ю., Перминов В.А.</i> Численное решение задачи о распространении верхового лесного пожара	54
<i>Тараканова В.А., Касымов Д.П.</i> Изучение в лабораторных условиях взаимодействия горящих и тлеющих частиц природного происхождения с плоской поверхностью различных строительных материалов из древесины	64
<i>Черпакова Н.А.</i> Исследование нелинейного поведения растворов полимеров в режиме больших периодических деформации	77
<i>Атамасова Е.С., Лаева В.И.</i> Конечно-разностная схема "Ромб" для численного решения уравнения конвекции-диффузии	88
<i>Афанасьева А.А., Старченко В.А.</i> Применение сингулярного разложения для сжатия изображений и решения плохо обусловленных систем линейных уравнений	99

<i>Бузмакова Г.В.</i> Упаковка оболочки из композитного материала и ее развертывание в условиях невесомости	111
<i>Давыдов А.С., Михайлов М.Д.</i> Математическое моделирование и численное исследование процесса самоочищения речного водоема.....	122
<i>Драморецкий А. С., Гольдин В. Д.</i> О методах расщепления при решении задач теплопроводности	134
<i>Потоцкая А.А., Старченко А.В., Захарова А.А.</i> Совмещение изображений на основании Shearlet-декомпозиции.....	145
<i>Фисенко В. Н.</i> Применение метода дискретных элементов для моделирования конфигурации засыпок из микросфер	158
<i>Хуторная А.И., Михайлов М.Д.</i> Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод с использованием некоторых модификаций модели Кенейла	167
<i>Борькина Э. Б.</i> Построение хеджирующих стратегий для европейских опционов с потреблением	179
<i>Хабарова Е. Л., Емельянова Т. В.</i> О последовательном оценивании параметров авторегрессионной модели с непрерывным временем	189
<i>Шерстобитова А. О., Емельянова Т. В.</i> О подходе к идентификации стохастической динамической системы ..	198
<i>Бондаренко В. В.</i> Конформное отображение на круговой многоугольник типа полосы.....	207
<i>Соколова Г. К.</i> О периодических функциях нескольких действительных переменных	218
<i>Хабарова Е. Л., Колесников И. А.</i> Построение минимальной периодической поверхности с помощью голоморфного отображения из полуплоскости на счетноугольник	228

<i>Шеметова В. В.</i> Об одном классе начальных задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в банаховых пространствах	237
<i>Киреенко С. Г., Гриншпон Я.С.</i> Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем	249
<i>Галанова Н. Ю., Кондабаева Т. А.</i> Подходы к решению логических задач на уроках математики и информатики ..	258
<i>Нынь Е.А., Лазарева Е. Г.</i> Математические задачи на уроках географии в школе	267

Кольца формальных матриц со свойством инволюции

Кирова В.О.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: Emily.bla@yandex.ru

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, инволюция, обратимый элемент.

Большое значение в алгебре имеют формальные матрицы, которые также называют обобщенными матрицами. Они постоянно встречаются в теории колец и модулей, функциональном анализе. Кольца формальных матриц расширяют понятие кольца матриц порядка n над данным кольцом.

Впервые понятие кольца формальных матриц и понятие формальной матрицы были введены в работах К. Мориты (1915-1995) – японского алгебраиста и тополога. В 1958 году в статье «*Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*» им был введен объект, позже названный *контекстом Мориты*.

Контекст Мориты представляет из себя следующий набор:

$$(R, M, N, S, \varphi, \psi),$$

где R, S – кольца; M, N – бимодули; φ и ψ – бимодульные гомоморфизмы, которые связаны между собой определенным образом.

По данному контексту Мориты строится кольцо матриц следующего вида:

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Оно именуется как *кольцо контекста Мориты*. Также его называют *кольцом формальных матриц* второго порядка, или *кольцом обобщенных матриц*.

Элементы матриц из кольца контекста Мориты, которое в дальнейшем будем называть *кольцом формальных матриц*, могут принадлежать нескольким кольцам и бимодулям. Формальные матрицы складываются и умножаются по обычным правилам сложения и умножения матриц. В результате данных алгебраических операций получается кольцо – кольцо формальных матриц. Кольца формальных матриц расширяют понятие кольца матриц порядка n над данным кольцом.

Определение 1. Пусть R – кольцо. *Левый R -модуль* определяется как аддитивная абелева группа A и такое отображение:

$$R \times A \rightarrow A,$$

при котором для всех $a, b \in A$ и $s, r \in R$ верны следующие равенства:

1. $r(a + b) = ra + rb$,
2. $(r + s)a = ra + sa$,
3. $(rs)a = r(sa)$,
4. $1a = a$.

Определение правых R -модулей аналогично определению левых модулей.

Определение 2. Пусть S – еще одно кольцо. R - S -бимодулем ${}_R A_S$ называется абелева группа A , которая является

левым модулем ${}_R A$ и правым модулем A_S . При этом для всех $a \in A, r \in R, s \in S$ верно следующее равенство:

$$(ra)s = r(as).$$

Построение колец формальных матриц

Все кольца будем считать ассоциативными и с единицей, а модули и бимодули — унитарными.

Определим кольцо формальных матриц. Пусть имеются два кольца R и S . Также даны R - S -бимодуль M и S - R -бимодуль N . Обозначим через K множество всех матриц следующего вида:

$$K = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R, s \in S, m \in M, n \in N$.

Видно, что относительно матричного сложения K образует абелеву группу. Но K всё еще не является кольцом. Поэтому, чтобы превратить K в кольцо, нужно уметь вычислять «произведения» элементов $n \in N$ и $m \in M$ так, чтобы их произведения попадали в кольца R и S :

$$\begin{aligned} mn &\in R, \\ nm &\in S. \end{aligned}$$

Корректно это можно сделать следующим образом. Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \phi: M \otimes_S N &\rightarrow R, \\ \psi: N \otimes_R M &\rightarrow S. \end{aligned}$$

Для всех $n \in N$ и $m \in M$ полагаем:

$$\begin{aligned} \phi(m \otimes n) &= mn, \\ \psi(n \otimes m) &= nm. \end{aligned}$$

Теперь матрицы из K можно умножать как в обычном кольце матриц:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr_1 + mn_1 & rm_1 + ms_1 \\ nr_1 + sn_1 & nm_1 + ss_1 \end{pmatrix},$$

где $r, r_1 \in R$; $s, s_1 \in S$; $m, m_1 \in M$; $n, n_1 \in N$.

Уточним, что rm_1, ms_1, nr_1, sn_1 — это соответствующие модульные произведения. Считаем, что для всех элементов $m, m_1 \in M$ и $n, n_1 \in N$ выполняются равенства ассоциативности:

$$\begin{aligned} (mn)m_1 &= m(nm_1), \\ (nm)n_1 &= n(mn_1). \end{aligned}$$

Теперь относительно указанных операций сложения и умножения K является кольцом. При проверке аксиом кольца нужно также учесть основные свойства тензорного произведения и бимодульность ϕ и ψ .

Верно и обратное: если K — кольцо, то выполнены указанные соотношения ассоциативности. Кольцо K называется кольцом формальных матриц и также обозначается через

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Если $N = 0$, то K — кольцо верхних треугольных матриц:

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Если $M = 0$, то K — кольцо нижних треугольных матриц:

$$K = \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Для задания колец верхних или нижних треугольных матриц гомоморфизмы ϕ и ψ не нужны.

При изучении кольца формальных матриц K необходимо понимать то, как свойства этого кольца зависят от свойств колец R и S , бимодулей M и N , гомоморфизмов ϕ и ψ .

Иногда удобно отождествлять матрицы с соответствующими элементами. Например, элемент $r \in R$ можно отождествлять со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно определить кольцо формальных матриц любого порядка n .

Определение 3. Пусть R – кольцо. Элемент v кольца R называется *обратимым*, если в R существует такой элемент x , что выполняются следующие равенства:

$$vx = 1 = xv.$$

Такой x называется *обратным* к v и обозначается v^{-1} . Итак:

$$v^{-1}v = 1 = v^{-1}v.$$

Элемент v^{-1} является единственным для v .

Определение 4. Элемент v кольца R называется *инволюцией*, если $v^2=1$, т.е. $v^{-1}=v$. Можно сказать, что v – обратимый элемент порядка 2.

Примеры самых простых инволюций: 1 и -1. Действительно: $(-1)^2 = 1$.

Говорят, что кольцо R обладает *свойством инволюции*, если каждый его элемент x представим в следующем виде:

$$x = u + v,$$

где v, u – обратимые элементы, причем v – инволюция.

Возникает вопрос: какие кольца формальных матриц обладают свойством инволюции? Для ответа на этот вопрос выясним, какие матрицы являются инволюциями.

Лемма 5. Пусть K – кольцо (верхних) треугольных матриц, в котором R и S имеют свойство инволюции,

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

является инволюцией тогда только тогда, когда r , s – инволюции, и $rm = -ms$.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$ является инволюцией. Это значит, что

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & rm + ms \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}.$$

Так как по условию исходная матрица является инволюцией, то справедливо следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} r^2 & rm + ms \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $r^2 = 1$, $s^2 = 1$, $rm + ms = 0$.

Итак, элементы r , s – инволюции и $rm = -ms$.

Достаточность. Пусть r, s – инволюции и $rm = -ms$.

Вычислим произведение

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & rm + ms \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $r^2 = 1, s^2 = 1, rm = -ms$, получаем

$$\begin{pmatrix} r^2 & rm + ms \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$ является инволюцией.

Предложение 6. Пусть K – кольцо верхних треугольных матриц второго порядка,

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Кольцо K имеет свойство инволюции тогда только тогда, когда R и S имеют свойство инволюции.

Доказательство. Необходимость. Пусть кольцо K имеет свойство инволюции.

Возьмем любой элемент $r \in R$, который можно записать так:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & m_1 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & m_2 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix},$$

где первая матрица в сумме – обратимая, вторая матрица – инволюция. Следовательно, u_1 – обратимый элемент, а v_1 – инволюция (согласно предыдущей лемме).

Далее имеем:

$$r = u_1 + v_1.$$

Следовательно, R имеет свойство инволюции.

Аналогично проводится доказательство для кольца S .

Достаточность. Пусть R и S имеют свойство инволюции. Возьмем любую матрицу кольца формальных матриц K :

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in K.$$

По условию элементы r и s можно представить в следующем виде:

$$r = u_1 + v_1,$$

$$s = u_2 + v_2,$$

где u_1, u_2 – обратимые, v_1, v_2 – инволюции.

Теперь можем записать:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 & m \\ 0 & u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & m \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} u_1 & m \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$ – обратимая матрица, а $\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$ – инволюция.

Итак, кольцо K имеет свойство инволюции.

Теорема 7. Пусть K – кольцо формальных матриц порядка n ,

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & R_2 & & M_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & R_n \end{pmatrix},$$

где R_i ($i = 1 \dots n$) – некоторые кольца.

Если кольца R_i ($i = 1 \dots n$) обладают свойством инволюции, то кольцо K тоже обладает свойством инволюции.

Доказательство. Возьмем любую матрицу M кольца формальных матриц K :

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & r_2 & & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

Так как по условию теоремы все кольца R_i обладают свойством инволюции, то элементы $r_i \in R_i$ ($i = 1 \dots n$) представимы в следующем виде:

$$r_i = u_i + v_i,$$

где u_i – обратимый элемент, v_i – инволюция в кольце R_i .

Тогда исходную матрицу M можно записать так:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & u_2 + v_2 & & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & u_n + v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & u_2 & & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & u_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

То, что кольцо формальных матриц K обладает свойством инволюции, докажем методом математической индукции.

Пусть $n = 1$. В этом случае матрица M состоит из одного элемента r_1 , который обладает свойством инволюции. Тогда, очевидно, что кольцо формальных матриц K тоже обладает этим свойством.

Далее будем считать, что $n \geq 2$. Представим исходную матрицу M в следующем блочном виде:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix}.$$

Здесь A – матрица порядка $(n - 1) \times (n - 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & M_{1,2} & \dots & M_{1,n-1} \\ M_{2,1} & R_2 & & M_{2,n-1} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & \dots & R_{n-1} \end{pmatrix},$$

C – вектор-строка размера $(1) \times (n - 1)$:

$$C = (M_{n,1} \quad M_{n,2} \quad \dots \quad M_{n,n-1}),$$

B – вектор-столбец размера $(n - 1) \times (1)$:

$$B = \begin{pmatrix} M_{1,n} \\ M_{2,n} \\ \dots \\ M_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

d – элемент со свойством инволюции, $d \in R_n$.

Применяя индукцию, получаем, что матрица A представима в виде суммы двух матриц:

$$A = D + U,$$

в которой U – обратимая матрица, D – диагональная инволюция.
Положим

$$a = CU^{-1}B, \quad a \in R_n.$$

Далее запишем

$$d - a = u + v,$$

где v – обратимый элемент, v – инволюция в R_I . Тогда элемент d представим в следующем виде:

$$d = u + a + v.$$

Теперь матрицу M можно записать так:

$$M = \begin{pmatrix} U & B \\ C & a + u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вторая матрица в сумме есть диагональная инволюция. Покажем, что первая матрица обратима. Для этого введем две обратимые матрицы P и Q :

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}Bu^{-1} \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь I – единичная матрица порядка $n - 1$. Обозначим первую матрицу в сумме так:

$$V = \begin{pmatrix} U & B \\ C & a + u \end{pmatrix}.$$

Вычисляя произведение PVQ , убеждаемся, что

$$PVQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате вычислений получили единичную матрицу. Таким образом, матрица V – обратимая.

Итак, матрица M есть сумма обратимой матрицы и инволюции. Следовательно, кольцо формальных матриц K обладает свойством инволюции.

Список литературы

1. Henriksen M. Two Classes of Rings Generated by Their Units. // Journal of algebra.-1974, Vol.31, №1, p.182-193.
 2. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyuiku Diagaku Sect.-1958. - V. 6. - P. 83-142.
 3. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фунд. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 8. С. 145–211.
 4. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Формальные матрицы и их определители // Фунд. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.
 5. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Кольца формальных матриц и модули над ними. МЦНМО, Москва, 2017.
-

Об эндоморфизмах p -группы ранга 3

Степанова А. Ю., Тимошенко Е. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Аннотация. В данной работе эндоморфизмы конечной p -группы ранга три представляются обобщенными (3×3) -матрицами, элементами которых являются подходящие классы вычетов. Для таких матриц мы вводим понятие определителя, свойства которого оказываются аналогичными свойствам определителей обычных матриц. Для одного из возможных частных случаев найден критерий обратимости обобщенной матрицы.

Ключевые слова: p -группа, матрица, определитель, кольцо обобщенных матриц, эндоморфизм.

Пусть \mathbf{Z} – кольцо целых чисел, p – простое число. Кольцо классов вычетов по модулю p^m будем обозначать через \mathbf{Z}_{p^m} . Пусть $m \geq n \geq k > 0$ и $H = \mathbf{Z}_{p^m} \oplus \mathbf{Z}_{p^n} \oplus \mathbf{Z}_{p^k}$ (мы будем записывать элементы группы H в виде вектор-столбцов). Каждому эндоморфизму φ группы H поставим в соответствие ту единственную матрицу

$$N_{\varphi} = \begin{pmatrix} a_1 + p^m \mathbf{Z} & a_2 + p^n \mathbf{Z} & a_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b_1 + p^n \mathbf{Z} & b_2 + p^n \mathbf{Z} & b_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c_1 + p^k \mathbf{Z} & c_2 + p^k \mathbf{Z} & c_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

для которой

$$\varphi \begin{pmatrix} z_1 + p^m \mathbf{Z} \\ z_2 + p^n \mathbf{Z} \\ z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z_1 + p^{m-n} a_2 z_2 + p^{m-k} a_3 z_3 + p^m \mathbf{Z} \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + p^{n-k} b_3 z_3 + p^n \mathbf{Z} \\ c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

при любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$.

Пусть в дополнение к φ имеется эндоморфизм $\psi \in \text{End } H$

и

$$N_\psi = \begin{pmatrix} a'_1 + p^m \mathbf{Z} & a'_2 + p^n \mathbf{Z} & a'_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b'_1 + p^n \mathbf{Z} & b'_2 + p^n \mathbf{Z} & b'_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c'_1 + p^k \mathbf{Z} & c'_2 + p^k \mathbf{Z} & c'_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для удобства будем писать $\bar{x} = x + p^m \mathbf{Z}$, $\vec{x} = x + p^n \mathbf{Z}$ и $\bar{x} = x + p^k \mathbf{Z}$ для всякого $x \in \mathbf{Z}$. Вычисляя для произвольных $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$ элемент

$$\varphi \left(\psi \begin{pmatrix} z_1 + p^m \mathbf{Z} \\ z_2 + p^n \mathbf{Z} \\ z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} a'_1 z_1 + p^{m-n} a'_2 z_2 + p^{m-k} a'_3 z_3 + p^m \mathbf{Z} \\ b'_1 z_1 + b'_2 z_2 + p^{n-k} b'_3 z_3 + p^n \mathbf{Z} \\ c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + c'_3 z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

получаем, что матрица $N_{\varphi\psi}$ равна

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1 a'_1 + s a_2 b'_1 + u a_3 c'_1} & \overline{a_1 a'_2 + a_2 b'_2 + t a_3 c'_2} & \overline{a_1 a'_3 + a_2 b'_3 + a_3 c'_3} \\ \overline{b_1 a'_1 + b_2 b'_1 + t b_3 c'_1} & \overline{s b_1 a'_2 + b_2 b'_2 + t b_3 c'_2} & \overline{s b_1 a'_3 + b_2 b'_3 + b_3 c'_3} \\ \overline{c_1 a'_1 + c_2 b'_1 + c_3 c'_1} & \overline{s c_1 a'_2 + c_2 b'_2 + c_3 c'_2} & \overline{u c_1 a'_3 + t c_2 b'_3 + c_3 c'_3} \end{pmatrix}$$

(здесь через s, t, u мы обозначили соответственно множители $p^{m-n}, p^{n-k}, p^{m-k}$).

Пусть на множестве $R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{p^m} & \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^k} \\ \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^k} \\ \mathbf{Z}_{p^k} & \mathbf{Z}_{p^k} & \mathbf{Z}_{p^k} \end{pmatrix}$, т.е. на

множестве всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ \overline{b_1} & \overline{b_2} & \overline{b_3} \\ \overline{c_1} & \overline{c_2} & \overline{c_3} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{Z}$, введена операция умножения так, что произведением матрицы вида (1) на матрицу вида (2) служит матрица, совпадающая с указанной выше матрицей $N_{\varphi\psi}$; сложение на R зададим поэлементно. Тогда ввиду сказанного выше R превращается в кольцо, изоморфное кольцу $\text{End } H$. Единичный элемент кольца R имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

(очевидно, что $AE = EA = A$ для всех $A \in R$).

Определение. *Определителем матрицы вида (3) назовем элемент*

$$|A| = \overline{a_1 b_2 c_3 - t a_1 b_3 c_2 - s a_2 b_1 c_3 + u(a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1)}$$

кольца \mathbf{Z}_{p^k} , где $s = p^{m-n}$, $t = p^{n-k}$, $u = p^{m-k}$.

Можно непосредственно проверить, что понятие определителя введено корректно, т.е. значение $|A|$ не зависит от выбора конкретных представителей a_i, b_i, c_i из соответствующих классов вычетов.

Если $m = n = k$, то R – это кольцо матриц, элементы которых принадлежат одному и тому же кольцу вычетов. Легко убедиться, что и операция умножения, и определитель в таком кольце R совпадают с обычными.

Предложение. *Для любых $A, A' \in R$ выполнено $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.*

Доказательство. Пусть A и A' совпадают с матрицами, задаваемыми формулами (1) и (2). Тогда

$$\begin{aligned}
|A| \cdot |A'| &= a_1 a'_1 b_2 b'_2 c_3 c'_3 + t^2 a_1 a'_1 b_3 b'_3 c_2 c'_2 + s^2 a_2 a'_2 b_1 b'_1 c_3 c'_3 - \\
&- t(a_1 a'_1 b_2 b'_3 c_3 c'_2 + a_1 a'_1 b_3 b'_2 c_2 c'_3) \\
&- s(a_1 a'_2 b_2 b'_1 c_3 c'_3 + a_2 a'_1 b_1 b'_2 c_3 c'_3) + \\
&+ u(a_1 a'_3 b_2 b'_1 c_3 c'_2 + a_1 a'_2 b_2 b'_3 c_3 c'_1 - a_1 a'_3 b_2 b'_2 c_3 c'_1 \\
&+ a_3 a'_1 b_1 b'_2 c_2 c'_3 + \\
&+ a_2 a'_1 b_3 b'_2 c_1 c'_3 - a_3 a'_1 b_2 b'_2 c_1 c'_3 + a_1 a'_2 b_3 b'_1 c_2 c'_3 + a_2 a'_1 b_1 b'_3 c_3 c'_2) \\
&- \\
&- ut(a_1 a'_3 b_3 b'_1 c_2 c'_2 + a_1 a'_2 b_3 b'_3 c_2 c'_1 - a_1 a'_3 b_3 b'_2 c_2 c'_1 \\
&+ a_3 a'_1 b_1 b'_3 c_2 c'_2 + \\
&+ a_2 a'_1 b_3 b'_3 c_1 c'_2 - a_3 a'_1 b_2 b'_3 c_1 c'_2) - us(a_2 a'_3 b_1 b'_1 c_3 c'_2 \\
&+ a_2 a'_2 b_1 b'_3 c_3 c'_1 - \\
&- a_2 a'_3 b_1 b'_2 c_3 c'_1 + a_3 a'_2 b_1 b'_1 c_2 c'_3 + a_2 a'_2 b_3 b'_1 c_1 c'_3 - a_3 a'_2 b_2 b'_1 c_1 c'_3) \\
&+ \\
&+ u^2(a_3 a'_3 b_1 b'_1 c_2 c'_2 + a_3 a'_2 b_1 b'_3 c_2 c'_1 - a_3 a'_3 b_1 b'_2 c_2 c'_1 \\
&+ a_2 a'_3 b_3 b'_1 c_1 c'_2 + \\
&+ a_2 a'_2 b_3 b'_3 c_1 c'_1 - a_2 a'_3 b_3 b'_2 c_1 c'_1 - a_3 a'_3 b_2 b'_1 c_1 c'_2 - \\
&- a_3 a'_2 b_2 b'_3 c_1 c'_1 + a_3 a'_3 b_2 b'_2 c_1 c'_1) + p^k \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Определитель $|AA'|$ равен выражению

$$\begin{aligned}
&(a_1 a'_1 + sa_2 b'_1 + ua_3 c'_1)(sb_1 a'_2 + b_2 b'_2 + tb_3 c'_2)(uc_1 a'_3 + tc_2 b'_3 \\
&+ c_3 c'_3) + \\
&+ u(a_1 a'_3 + a_2 b'_3 + a_3 c'_3)(b_1 a'_1 + b_2 b'_1 \\
&+ tb_3 c'_1)(sc_1 a'_2 + c_2 b'_2 + c_3 c'_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u(a_1a'_2 + a_2b'_2 + ta_3c'_2)(sb_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3c'_3)(c_1a'_1 + c_2b'_1 \\
& \quad + c_3c'_1) - \\
& - u(a_1a'_3 + a_2b'_3 + a_3c'_3)(sb_1a'_2 + b_2b'_2 + tb_3c'_2)(c_1a'_1 + c_2b'_1 \\
& \quad + c_3c'_1) - \\
& - t(a_1a'_1 + sa_2b'_1 + ua_3c'_1)(sb_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3c'_3)(sc_1a'_2 + \\
& \quad + c_2b'_2 + c_3c'_2) - s(a_1a'_2 + a_2b'_2 + ta_3c'_2)(b_1a'_1 + \\
& \quad + b_2b'_1 + tb_3c'_1)(uc_1a'_3 + tc_2b'_3 + c_3c'_3) + p^k\mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

После приведения подобных получаем, что $|AA'| = |A| \cdot |A'|$. ■

Теорема. Пусть $m > n = k > 0$. Для матрицы вида (3) эквивалентны следующие условия:

- 1) Числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p ;
- 2) $|A|$ – обратимый элемент в \mathbf{Z}_p^n ;
- 3) A – обратимый элемент в R .

Если эти условия выполнены, то матрица

$$B = \begin{pmatrix} \overline{G(1 - p^{m-n}FM)} & \overline{F(a_3c_2 - a_2c_3)} & \overline{F(a_2b_3 - a_3b_2)} \\ \overline{F(b_3c_1 - b_1c_3)} & \overline{F(a_1c_3 - p^{m-n}a_3c_1)} & \overline{F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3)} \\ \overline{F(b_1c_2 - b_2c_1)} & \overline{F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2)} & \overline{F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)} \end{pmatrix}$$

где $M = a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3$, $G + p^m\mathbf{Z} =$

$(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1}$, $F + p^n\mathbf{Z} = |A|^{-1}$, является обратной для A .

Доказательство. Заметим, что $|A| = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M + p^n\mathbf{Z}$.

1) \Rightarrow 2). Пусть числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p , тогда справедливо равенство $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2, p) = 1$. Так

как $m > n$, то получаем, что $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M, p) = 1$. Это означает, что элемент $|A|$ обратим в \mathbf{Z}_p^n .

2) \Rightarrow 1). Предположим, что элемент $|A|$ является обратимым, т.е. выполнено $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M, p) = 1$. Так как $m > n$, то можно заключить, что $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2, p) = 1$. Следовательно, числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p .

3) \Rightarrow 2). Пусть матрица A обратима, тогда существует матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = E$. Так как $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 + p^n\mathbf{Z}$, то $|A^{-1}|$ – элемент, обратный к $|A|$.

2) \Rightarrow 3). Пусть выполнено условие 2) и $F + p^n\mathbf{Z} = |A|^{-1}$. Так как справедлива импликация 2) \Rightarrow 1), то число a_1 не делится на p и, значит, элемент $a_1 + p^m\mathbf{Z}$ является обратимым в \mathbf{Z}_p^m , т.е. существует элемент $G + p^m\mathbf{Z} = (a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1}$. Поскольку $m > n$, то справедливо равенство $G + p^n\mathbf{Z} = (a_1 + p^n\mathbf{Z})^{-1}$. Убедимся, что матрица B обратна к матрице A . Для этого мы обозначим $\delta = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M$ и рассмотрим матрицу $D = AB$ и ее элементы d_{ij} :

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= a_1G(1 - p^{m-n}FM) + p^{m-n}a_2F(b_3c_1 - b_1c_3) + \\
 &\quad + p^{m-n}a_3F(b_1c_2 - b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = \\
 &= (a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) + \\
 &\quad + (p^{m-n}F(a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) + p^m\mathbf{Z}) = \\
 &= (a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} \\
 &\quad + \\
 &\quad + (p^{m-n}FM + p^m\mathbf{Z}) = 1 + p^m\mathbf{Z};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{12} &= a_1F(a_3c_2 - a_2c_3) + a_2F(a_1c_3 - p^{m-n}a_3c_1) + \\
&\quad + a_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^n\mathbf{Z} \\
&= F(a_1c_2a_3 - a_1a_2c_3 + a_1a_2c_3 - \\
&\quad - p^{m-n}c_1a_2a_3 + p^{m-n}c_1a_2a_3 - a_1c_2a_3) + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{13} &= a_1F(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3) + \\
&\quad + a_3F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^n\mathbf{Z} \\
&= F(a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 + p^{m-n}b_1a_2a_3 - \\
&\quad - a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 - p^{m-n}b_1a_2a_3) + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{21} &= b_1G(1 - p^{m-n}FM) + b_2F(b_3c_1 - b_1c_3) + \\
&\quad + b_3F(b_1c_2 - b_2c_1) + p^n\mathbf{Z} = b_1G(1 - p^{m-n}FM) + \\
&\quad + F(c_1b_2b_3 - b_1b_2c_3 + b_1c_2b_3 - c_1b_2b_3) + p^n\mathbf{Z} = \\
&= b_1G(1 - p^{m-n}FM + p^n\mathbf{Z}) \\
&\quad + b_1F(c_2b_3 - b_2c_3)(a_1 + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z}) = \\
&= b_1G(1 - p^{m-n}FM) + b_1GF(a_1c_2b_3 - a_1b_2c_3) + p^n\mathbf{Z} = \\
&= b_1G - b_1GF(a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + p^{m-n}M) + p^n\mathbf{Z} = \\
&= (b_1G + p^n\mathbf{Z}) - b_1G(F + p^n\mathbf{Z})(\delta + p^n\mathbf{Z}) = \\
&= (b_1G + p^n\mathbf{Z}) - b_1G(\delta + p^n\mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n\mathbf{Z}) = \\
&= b_1G(1 - 1) + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{22} &= p^{m-n}b_1F(a_3c_2 - a_2c_3) + b_2F(a_1c_3 - p^{m-n}a_3c_1) + \\
&\quad + b_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^n\mathbf{Z} \\
&= F(p^{m-n}b_1c_2a_3 - p^{m-n}b_1a_2c_3 + \\
&\quad + a_1b_2c_3 - p^{m-n}c_1b_2a_3 + p^{m-n}c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3) + p^n\mathbf{Z} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = (\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}; \\
d_{23} &= p^{m-n} b_1 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\
&\quad + b_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(p^{m-n} b_1 a_2 b_3 - p^{m-n} b_1 b_2 a_3 + \\
&\quad + p^{m-n} b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - p^{m-n} b_1 a_2 b_3) + p^n \mathbf{Z} = 0 + \\
&\quad p^n \mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{31} &= c_1 G(1 - p^{m-n} FM) + c_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + \\
&\quad + c_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^n \mathbf{Z} = c_1 G(1 - p^{m-n} FM) + \\
&\quad + F(c_1 c_2 b_3 - b_1 c_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 - c_1 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
&= c_1 G(1 - p^{m-n} FM + p^n \mathbf{Z}) \\
&\quad + c_1 F(c_2 b_3 - b_2 c_3)(a_1 + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= c_1 G - c_1 GF(p^{m-n} M - a_1 c_2 b_3 + a_1 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
&= (c_1 G + p^n \mathbf{Z}) - c_1 G(F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= (c_1 G + p^n \mathbf{Z}) - c_1 G(\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= c_1 G(1 - 1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{32} &= p^{m-n} c_1 F(a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_2 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
&\quad + c_3 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(p^{m-n} c_1 c_2 a_3 - p^{m-n} c_1 a_2 c_3 + \\
&\quad + a_1 c_2 c_3 - p^{m-n} c_1 c_2 a_3 + p^{m-n} c_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = 0 + \\
&\quad p^n \mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{33} &= p^{m-n} c_1 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\
&\quad + c_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p^{m-n}(a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3) + p^n\mathbf{Z} = \\
& = (F + p^n\mathbf{Z})(\delta + p^n\mathbf{Z}) = 1 + p^n\mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Получаем, что $D = E$. Рассмотрим матрицу $D' = BA$ и ее элементы d'_{ij} :

$$\begin{aligned}
d'_{11} &= a_1G(1 - p^{m-n}FM) + p^{m-n}b_1F(a_3c_2 - a_2c_3) + \\
& + p^{m-n}c_1F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^m\mathbf{Z} = (a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) - \\
& - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) + \\
& + p^{m-n}F(a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + p^m\mathbf{Z}) = \\
& = (a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} \\
& + \\
& + (p^{m-n}FM + p^m\mathbf{Z}) = 1 + p^m\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_{12} &= a_2G(1 - p^{m-n}FM) + b_2F(a_3c_2 - a_2c_3) + \\
& + c_2F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^n\mathbf{Z} = a_2G(1 - p^{m-n}FM) + \\
& + F(a_3b_2c_2 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2) + p^n\mathbf{Z} = \\
& = a_2G(1 - p^{m-n}FM + p^n\mathbf{Z}) - \\
& - a_2F(b_2c_3 - b_3c_2)(a_1 + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = (a_2G + p^n\mathbf{Z}) - a_2GF(p^{m-n}M + a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = (a_2G + p^n\mathbf{Z}) - a_2G(F + p^n\mathbf{Z})(\delta + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = (a_2G + p^n\mathbf{Z}) - a_2G(\delta + p^n\mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = a_2G(1 - 1) + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$d'_{13} = a_3G(1 - p^{m-n}FM) + b_3F(a_3c_2 - a_2c_3) +$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + p^n \mathbf{Z} = a_3 G(1 - p^{m-n} FM) + \\
& + F(a_3 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_3 + a_2 b_3 c_3 - a_3 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
& = a_3 G(1 - p^{m-n} FM + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 F(b_2 c_3 - b_3 c_2)(a_1 + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z}) = (a_3 G + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 GF(p^{m-n} M + a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + p^n \mathbf{Z}) = (a_3 G + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 G(F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = (a_3 G + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 G(\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = a_3 G(1 - 1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{21} & = a_1 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_1 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
& + c_1 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 + a_1 b_1 c_3 - \\
& - p^{m-n} a_3 b_1 c_1 + p^{m-n} a_3 b_1 c_1 - a_1 b_3 c_1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{22} & = p^{m-n} a_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_2 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
& + c_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \\
& + p^{m-n}(a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2)) + p^n \mathbf{Z} = \\
& = (F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{23} & = p^{m-n} a_3 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_3 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
& + c_3 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + p^n \mathbf{Z} \\
& = F(p^{m-n} a_3 b_3 c_1 - p^{m-n} a_3 b_1 c_3 + \\
& + a_1 b_3 c_3 - p^{m-n} a_3 b_3 c_1 + p^{m-n} a_3 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
& 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{31} & = a_1 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_1 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
& \quad = F(a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 + p^{m-n} a_2 b_1 c_1 - \\
& \quad - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 - p^{m-n} a_2 b_1 c_1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{32} & = p^{m-n} a_2 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_2 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + \\
& \quad + c_2 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
& \quad = F(p^{m-n} a_2 b_1 c_2 - p^{m-n} a_2 b_2 c_1 + \\
& \quad + p^{m-n} a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 + a_1 b_2 c_2 - p^{m-n} a_2 b_1 c_2) + p^n \mathbf{Z} = \\
& \quad \quad 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{33} & = p^{m-n} a_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_3 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + \\
& \quad + c_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \\
& \quad + p^{m-n} (a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3)) + p^n \mathbf{Z} = \\
& \quad = (F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $D' = D = E$. Следовательно, B – матрица, обратная к матрице A .

Список литературы

- [1] Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО. - 2017.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. - 1974; 1977.

Математическое моделирование зажигания лесных горючих материалов лучистым тепловым потокom в многоярусном массиве

Акчина С.С., Перминов В.А.

Томский политехнический университет, г. Томск

e-mail: akchinas@mail.ru

Аннотация. В данной работе представлена математическая модель и численные результаты зажигания полого леса в результате разрыва газопровода с образованием «огненного шара» (ОШ) с учетом свойств лесного массива и коэффициента ослабления излучения пологом леса. Проблема взрывов в нефтехимической промышленности с образованием ОШ является сегодня актуальной для многих стран, включая и РФ. Разработана компьютерная программа, которая используется для определения безопасных расстояний от объектов повышенной опасности (ОПО).

Ключевые слова: математическое моделирование, огненный шар, тепловое излучение, газопровод, зажигание.

На сегодняшний день общая протяженность линейной части магистральных трубопроводов в Российской Федерации составляет более 266,4 тыс. км, из которых 188,4 тыс. км. приходится на магистральные газопроводы [1]. Разрыв газопровода с воспламенением газа и образованием ОШ

представляет собой один из вероятных сценариев развития аварии (рисунок 1) [2]. Облако пара, смешанное с воздухом, но с преобладанием горючего вещества, не способное объемно детонировать, начинает гореть вокруг своей внешней оболочки и вытягивается, образуя ОШ. Такие ОШ крайне опасны, они излучают тепло, которое может причинить смертельные ожоги наблюдателям, а также вызвать пожары [3].

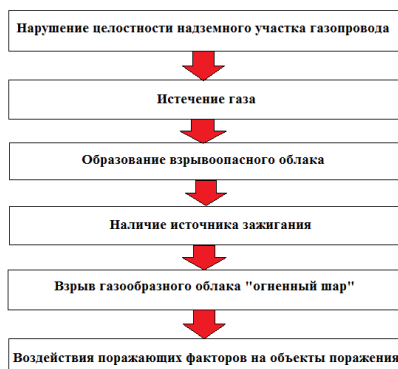


Рис. 1. Этапы развития аварии на газопроводе

Физико-математическая модель зажигания растительного покрова в результате разрыва газопровода. В результате повреждения газопровода и последующего взрыва с образованием «огненного шара» вследствие воздействия интенсивного потока излучения на полог леса происходит его заживание. Необходимо определить размеры зон заживания до лесного массива.

Источником лучистой энергии является ОШ, находящийся на высоте H от земной поверхности (рисунок 2). Учитывая его совсем незначительные размеры в сравнении с

радиусом Земли, будем считать точечным источником излучения, D – расстояние от центра источника до текущей точки поверхности лесного массива, h – высота лесного массива, 0 – эпицентр, r – радиус зоны зажигания. На верхнюю границу $z=h$ лесного массива действует интенсивный лучистый поток $q_R(r,t)$, который ослабляется по мере удаления от эпицентра 0 . Максимум интенсивности источника достигается при $t=t_0$, далее она затухает до нуля согласно данным о $q_R(r,t)$, которая может быть аппроксимирована следующим образом [4]:

$$q_R(r,t) = \frac{t_p P_m \sin L}{4\pi D^2} \begin{cases} t/t_m, & t < t_m \\ \exp(-k_0(t/t_m - 1)), & t \geq t_m \end{cases}, (1)$$

Здесь t_m – время максимума тепловыделения источника излучения, с;

D – расстояние от центра источника излучения до полога леса, м;

t_p – коэффициент пропускания атмосферы;

P_m – максимальная величина светового импульса в момент времени t_m , Дж/с;

L – угол между направлением вектора плотности потока излучения и верхней границей растительного покрова;

k_0 – аппроксимационный коэффициент ($k_0=0.75$).

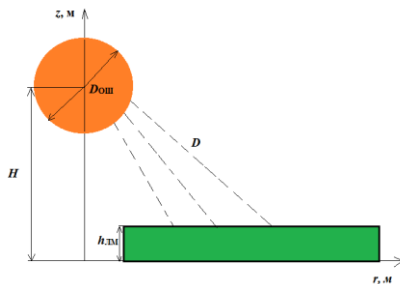


Рис. 2. Схема процесса зажигания лесного массива

Математически задача сводится к решению следующих уравнений [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \dot{m} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho \overline{w'^2}) - \rho s c_d w^2 - \rho g \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w c_p T) = \frac{\partial}{\partial z}(-\rho c_p \overline{w'T'}) + k_g(cU_R - 4\sigma T^4) + q_5 R_5 + A_5(T_S - T) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w c_\alpha) = \frac{\partial}{\partial z}(-\rho \overline{w'c'_\alpha}) - R_{5\alpha}, \alpha = 1, 2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial z} \right) - k c U_R + 4k_g \sigma T^4 + 4k_s \sigma T_S^4 = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^4 \rho_i c_{pi} \varphi_i \frac{\partial T_S}{\partial t} = q_3 R_3 - q_2 R_2 + k_s(cU_R - 4\sigma T_S^4) + A_5(T - T_S) \quad (7)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -R_1, \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -R_2, \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \alpha_c R_1 - \frac{M_c}{M_1} R_3, \rho_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha = 1, p_e = \rho RT \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{M_\alpha}, \dot{m} = (1 - \alpha_c) R_1 + R_2 + \frac{M_c}{M_1} R_3,$$

$$R_{51} = -R_3 - \frac{M_1}{2M_2} R_5, R_{52} = v(1 - \alpha_c) R_1 - R_5$$

$$R_1 = k_1 \rho_1 \varphi_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT_S}\right), R_2 = k_2 \rho_2 \varphi_2 T_S^{-0.5} \exp\left(-\frac{E_2}{RT_S}\right),$$

$$R_3 = k_3 \rho_3 \varphi_3 s_\alpha c_1 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_S}\right),$$

$$R_5 = M_2 k_5 \left(\frac{c_1 M}{M_1}\right)^{0.25} \left(\frac{c_2 M}{M_2}\right) T^{-2.25} \exp\left(-\frac{E_5}{RT}\right) \quad (9)$$

Начальные и граничные условия для системы уравнений

(2)-(9) имеют следующий вид:

$$t = 0, w = 0, T = T_e, c_\alpha = c_{\alpha e}, T_S = T_e, \varphi_i = \varphi_{ie}; \quad (10)$$

$$z = z_0: \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial z} = 0, -\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)} (4\sigma T_S^4 - cU_R) \quad (11)$$

$$z = h: \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial z} = 0, \frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial z} + \frac{c}{2} U_R = 2q_R(r, t). \quad (12)$$

Эти уравнения решаются с помощью метода контрольных объемов. Полученный дискретный аналог

решается с помощью метода TDMA [5]. Численное решение задачи осуществляется в пакете Visual Studio на языке Fortran.

Результаты численного решения. На основе описанной физико-математической модели были проведены численные расчеты, результатом которых стало: определение максимального радиуса зажигания полога леса при воздействии теплового излучения на его поверхность при взрыве газопровода с образованием.

В рамках численного решения для нахождения коэффициента ослабления пологом леса соснового древостоя использовалась его зависимость от общей поглощающей поверхности в вертикальном столбе растительности $\omega (s_1 + s_2)$ с учетом угла наклона хвоинок (рисунок 3). В нашем случае для соснового леса характерно возрастание угла наклона хвоинки по отношению к горизонтальной плоскости по мере продвижения вверх по стволу от 20–30 до 80–90°, по мере приближения к стволу хвоинки приобретают угол наклона, близкий к 90°, независимо от плоскости их расположения (рисунок 4) [6].

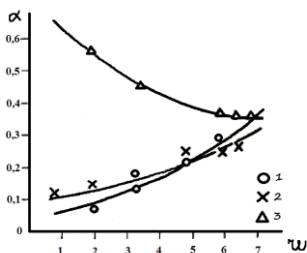


Рис. 3. Зависимость коэффициента ослабления α от ω для сосновой посадки (градусы: >45 (1), 30–45 (2), 20–30 (3))[6]



Рис. 4. Схема распределения углов наклона хвоинок для посадок сосны в нижней (1) и верхней (2) частях дерева [6]

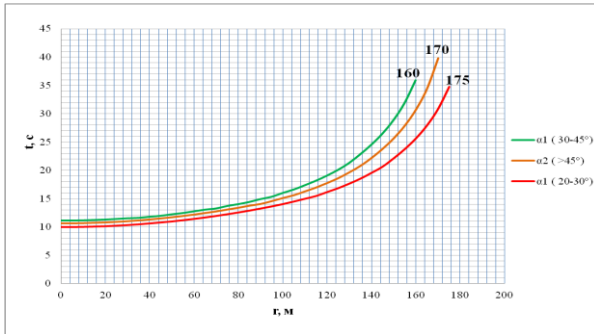


Рис. 5. Зависимость радиуса зажигания растительности от коэффициента ослабления пологом леса при $\bar{z}=0.7$

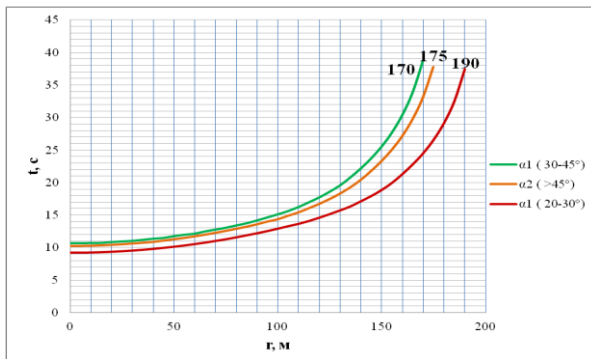


Рис. 6. Зависимость радиуса зажигания растительности от коэффициента ослабления пологом леса при $\bar{z}=0.6$

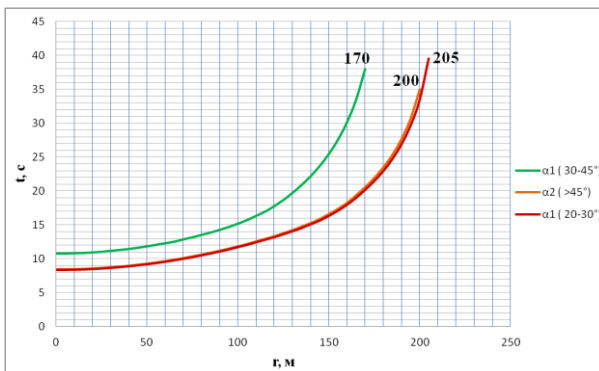


Рис. 7. Зависимость радиуса зажигания полога леса от коэффициента ослабления пологом леса при $\bar{z}=0.5$

При значении запаса ЛГМ $z=0.3 \text{ кг/м}^3$ и средней высоты древостоя $\bar{z}=0.7$ наибольшее значение радиуса зажигания $r^*=175 \text{ м}$ получили при коэффициенте ослабления пологом леса 0.375 (рисунок 5), при $z=0.3 \text{ кг/м}^3$ и $\bar{z}=0.6$ радиус зажигания составляет $r^*=190 \text{ м}$ при коэффициенте ослабления пологом леса 0.380 (рисунок 6), а при $z=0.2 \text{ кг/м}^3$ и $\bar{z}=0.5$ наибольшее значение радиуса зажигания составляет $r^*=205 \text{ м}$ при коэффициенте ослабления пологом леса 0.385 (рисунок 7) при углах наклона игл 20–30°.

Как показывают рисунки 5–7, на величину радиуса зажигания растительного покрова r^* влияют угол наклона сосновых игл, а также общая поглощающая поверхность в вертикальном столбе растительности, которые выражаются через коэффициент ослабления пологом леса. При уменьшении угла наклона хвоинок и общей поглощающей поверхности в

вертикальном столбе растительности радиус зажигания растительности увеличивается.

В результате проделанной работы, основываясь на полученных численных расчетах, был сделан вывод, что определяющий параметр безопасности, а именно расстояние между газопроводом и лесным массивом не должен рассчитываться без структурных особенностей и текущих характеристик ЛГМ.

Список литературы

[1] Годовой отчет о деятельности федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору в 2016 году [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gosnadzor.ru/public/annual_reports/Годовой%20отчет%20за%202016%20год%203.pdf, свободный – (дата обращения: 20.03.2019).

[2] СТО Газпром 2-2.3-400-2009 Методика анализа риска для опасных производственных объектов газодобывающих предприятий ОАО «Газпром». М: Газпром. -2009. – С.343.

[3] Маршалл В. Основные опасности химических производств: пер. с англ. М: Мир. – 1989. – С.682.

[4] Перминов В.А. Математическое моделирование возникновения верховых и массовых лесных пожаров : дис. ... док. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Перминов Валерий Афанасьевич; [Место защиты: Томск. гос. ун-т].– Томск. – 2010. – С.282.

[5] Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат. – 1971. – С.128.

[6] Росс Ю.К. Радиационный режим и архитектура растительного покрова. Л.: Гидрометеиздат. – 1975. – С.342.

Математическое моделирование течения закрученного потока жидкости Балкли-Гершеля в цилиндрическом канале

О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, А. Е. Асеева

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: alena.aseeva.93@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты исследования течения потока жидкости с пределом текучести Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале. Течение дилатантной жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой и пристеночной зонах течения. Течение псевдопластической жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой зоне течения. По мере стабилизации течения и уменьшения скоростей сдвиговых деформаций эффективная вязкость жидкости с пределом текучести в пристеночной зоне уменьшается, а в приосевой – увеличивается, что приводит к формированию зоны квазитвердого течения.

Ключевые слова: реология, дилатантные среды псевдопластические среды, вязкопластическая жидкость, жидкость Балкли – Гершеля, закрученные течения, вычислительная гидродинамика.

Введение. Течение растворов и расплавов полимеров в большинстве случаев описывается сложной функциональной зависимостью эффективной вязкости, как от приложенного напряжения сдвига, так и от градиента скорости. На практике часто встречаются системы, обладающие пространственной структурой, которые ведут себя подобно твердым телам вплоть до высоких скоростей сдвига [1, 2]. Реологическое поведение таких сред можно описать моделью Балкли – Гершеля, объединяющей в себе свойства модели степенной жидкости Оствальда – де Вейля и вязкопластической среды Шведова – Бингама [3, 4].

Исследованию течения в каналах сред со сложным реологическим поведением в настоящее время уделяется значительное внимание [5].

В статье [5] представлены результаты численного моделирования стационарных течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра. Установлено, что при больших значениях эксцентриситета в канале формируется возвратное течение, размеры и положения которого определяют интегральные характеристики течения.

Исследование нестационарных течений дилатантной и псевдопластической жидкостей Оствальда – де Вейля, а также жидкости, описываемой моделью Уильямсона, вблизи твердого тела выполнено в работе [6].

Исследование течения вязкопластической жидкости Шведова – Бингама в канале с внезапным расширением [7]

показало, что в случае стационарного течения в области уступа реализуется режим с образованием зоны квазитвердого течения.

В работе [8 -10] проведено моделирование течения жидкости Балкли-Гершеля со свободной поверхностью, реализующегося при заполнении плоских каналов в поле силы тяжести.

Математическое моделирование течений реологически сложных сред существенно усложняется при наличии закрутки потока на входе в канал. Настоящая работа является продолжением исследований закрученных течений неньютоновских сред [11 – 17]. Целью настоящей работы является исследование структуры течения закрученного потока дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли - Гершеля в цилиндрическом канале.

Математическая модель. Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения [1]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\rho w^2}{r}, \quad (3)$$

Для построения модели среды необходимо установить связь между девиаторами тензора напряжений и тензора скоростей деформации. Для среды Балкли - Гершеля

реологические соотношения в случае осесимметричного течения имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\left(kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xr} = \left(kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \tau_{rr} &= 2\left(kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}\right)\frac{\partial v}{\partial r}, \tau_{x\varphi} = \left(kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}\right)\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \tau_{r\varphi} &= \left(kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)\right), \tau_{\varphi\varphi} = 2\left(kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}\right)\frac{v}{r}, \\ U &= 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(r\frac{\partial w/r}{\partial r}\right)^2. \quad (4) \end{aligned}$$

Среда определяется тремя параметрами – предельным напряжением сдвига σ , показателем (индексом) консистенции жидкости k , характеризующим ее текучесть, а также параметром нелинейности n . При $k=0$ получаем идеально пластическую среду, при $\sigma=0$ – жидкость Оствальда – де Вейля. Параметр n характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее n отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется нелинейность кривой течения. При $n=1$ модель Балкли – Гершеля переходит в модель Шведова – Бингама. Ньютоновская жидкость характеризуется параметрами $n=1$. Значениям $n > 1$ отвечают дилатантные жидкости, у которых эффективная вязкость растет с увеличением скоростей сдвига, значениям $0 < n < 1$ отвечают псевдопластичные жидкости, эффективная вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига.

Реологические соотношения (5) справедливы в области течения

$$T^2 = \frac{\tau_{xx}^2 + \tau_{rr}^2 + \tau_{\varphi\varphi}^2}{2} + \tau_{x\varphi}^2 + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{xr}^2 > \sigma^2. \quad (6)$$

В случае $T^2 \leq \sigma^2$ среда движется как абсолютно твердое тело: компоненты тензора скоростей деформации равны нулю.

Эллиптический вид используемых уравнений требует задания условий на границах расчетной области. На входе в канал ($x = 0$) задается распределение скорости потока:

$$u = u_{\text{in}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad v = 0,$$

Граничные условия в выходном сечении канала ($x = L$) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0.$$

На оси канала ($r = 0$) задаются условия симметрии:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0.$$

На стенках канала ($r = R$) выполняется условие прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Анализ полученных результатов. Рассмотрим основные результаты исследования течения вязкопластической жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале. При моделировании поля течения диапазон изменения параметров был выбран следующим: консистенция жидкости изменялась в

пределах $k = 0.05 \div 10 \text{ Н} \cdot \text{с}^n / \text{м}^2$, показатель нелинейности – $n = 0.1 \div 3$, предельное напряжение сдвига $\sigma = 0 \div 10 \text{ Па}$, среднерасходная скорость – $u_{\text{ин}} = 1 \div 10 \text{ м/с}$, число Россби – $Ro = 0 \div 10$. Радиус канала составлял $R = 0.1 \text{ м}$, длина канала – $L = 2 \div 5 \text{ м}$.

При стабилизированном течении жидкости Балкли – Гершеля в центре канала $r < r_Y$ образуется жесткая зона. Положение границы жесткой зоны определяется перепадом

давления и предельным напряжением сдвига: $r_Y = 2\sigma \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}$.

Величина r_Y определяет условие, при котором возможно течение в канале. Течение в канале реализуется при выполнении условия $r_Y < R$. Если $R < r_Y$, то происходит запираание канала и течение становится невозможным.

В жесткой зоне среда движется как твердое тело с плоским профилем осевой скорости:

$r \leq r_Y$:

$$u = u_Y = \frac{n}{n+1} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \left(\frac{\sigma}{k} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{R}{r_Y} - 1 \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (7)$$

Во внешней области формируется зона сдвигового течения, и радиальное распределение скорости имеет вид:

$$r_Y < r: \quad u = u_Y \left[1 - \left(\frac{r - r_Y}{R - r_Y} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (8)$$

При анализе течения предполагалось, что распределение скоростей на входе в канал подчиняется закону Пуазейля. В случае ньютоновской жидкости перестройки профиля скорости не происходит, так как пуазейлевский профиль соответствует установившемуся течению жидкости. Однако для неньютоновской среды параболический профиль скорости не соответствует стабилизированному потоку, поэтому вблизи от входа в канал профиль осевой скорости претерпевает изменения.

На рис. 1 представлено радиальное распределение осевой скорости дилатантной жидкости с пределом текучести в различных сечениях трубы. Величина осевой скорости в центральной части трубы вниз по потоку уменьшается, а в пристеночной – увеличивается, что приводит к уменьшению толщины пограничного слоя. На значительном удалении от входа в среде с пределом текучести радиальное распределение осевой скорости характеризуется жесткой зоной в центре канала и зоной сдвигового течения вблизи стенки. С увеличением величины предельного напряжения сдвига σ толщина жесткой зоны увеличивается, а толщина зоны сдвигового течения уменьшается. С увеличением значений показателя нелинейности распределение осевой скорости в зоне течения приближается к линейному, что свидетельствует о проявлении дилатантных свойств.

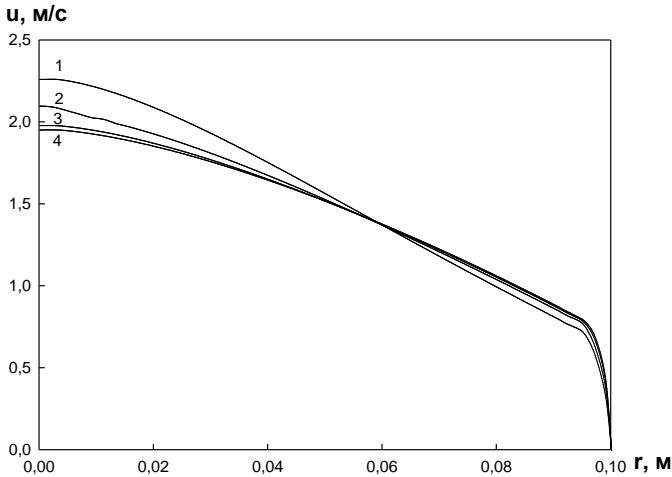


Рис. 1 Радиальное распределение осевой скорости: $u_{in} = 2.5$ м/с.; а – $n = 2$, $k = 1 \text{ Па}\cdot\text{с}^2$, $\sigma = 5 \text{ Па}$: 1 $x = 0.1 \text{ м}$, 2 – 0.2, 3 – 0.6, 4 – 1.5

Влияние показателя нелинейности n на радиальное распределение эффективной вязкости в различных сечениях трубы свойства жидкости Балкли – Гершеля иллюстрируют рис. 2, – 2в.

Характерной особенностью течения дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли-Гершеля является неоднозначное влияние интенсивности скоростей сдвиговых деформаций на поле эффективной вязкости. Так составляющая эффективной вязкости, обусловленная дилатантными свойствами среды, увеличивается с ростом интенсивности скоростей сдвиговых деформаций, а вязкопластическая составляющая эффективной вязкости – уменьшается.

По аналогии с ньютоновской жидкостью удобно ввести в рассмотрение эффективную вязкость μ_{eff} , которая может быть рассчитана как

$$\mu_{\text{eff}} = kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}. \quad (9)$$

Первое слагаемое в (9) $\mu_{\text{pl}} = kU^{n-1}$ характеризует, так называемую, пластическую вязкость, второе – $\mu_{\text{str}} = \frac{\sigma}{U}$ структурную вязкость, связанную с необходимостью приложения напряжений, превосходящих предел текучести для разрушения структуры среды.

Простейший анализ показывает, что при больших и малых скоростях сдвига в дилатантных средах эффективная вязкость принимает большие значения. При $U \rightarrow 0$ и $U \rightarrow \infty$ эффективная вязкость $\mu_{\text{eff}} \rightarrow \infty$. Минимальное значение эффективной вязкости реализуется при умеренных значениях

скоростей сдвига:
$$U_{\text{min}} = \left[\frac{\sigma}{(n-1)k} \right]^{1/n}.$$

В псевдопластических средах эффективная вязкость стремится к бесконечности при $U \rightarrow 0$, что объясняется их структурированием и формированием квазитвердых зон. При $U \rightarrow \infty$ эффективная вязкость становится равной нулю.

На рис. 2 представлены радиальные распределения эффективной вязкости μ_{eff} в различных сечениях канала для $n = 2$. Из рисунка видно, что в потоке выделяются три

характерные зоны. В окрестности оси градиенты скорости имеют невысокие значения. Это приводит к увеличению эффективной вязкости в приосевой зоне течения, в которой преобладают вязкопластические свойства потока. В центральной части потока влияние вязкопластических и дилатантных свойств среды на величину эффективной вязкости является соизмеримым. Радиальное распределение эффективной вязкости на этом участке течения является немонотонным и зависит от соотношения вязкопластических и дилатантных свойств. В окрестности стенки, в области значительных градиентов скорости преобладают дилатантные свойства среды, приводящие к росту значений эффективной вязкости и загущению среды. По мере гидродинамической стабилизации течения и уменьшения значений интенсивности скоростей сдвиговых деформаций U наблюдается рост значений эффективной вязкости в приосевой зоне течения и уменьшение μ_{eff} в центральной области.

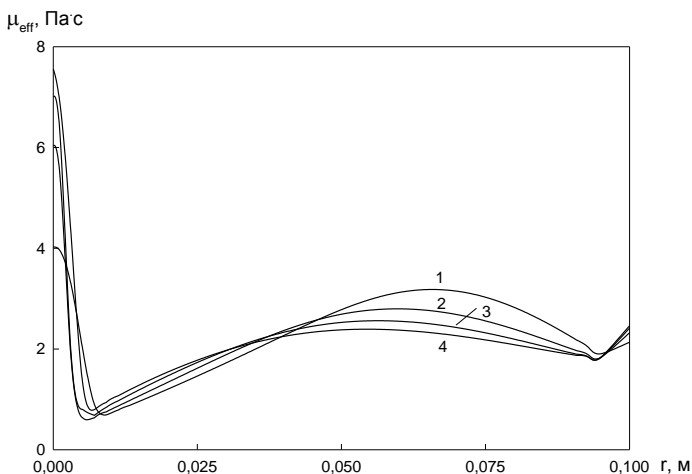


Рис. 2 Радиальное распределение эффективной вязкости в потоке; $u_{in} = 2.5$ м/с, 1 - $x = 0.2$ м, 2 - 0.6, 3 - 1, 4 - 1.5 $n = 2$

$$k = 0.1 \text{ Па} \cdot \text{с}^2, \sigma = 1 \text{ Па}$$

Перейдем теперь к рассмотрению течения псевдопластической жидкости Балкли – Гершеля. Из рисунка видно, что с уменьшением показателя нелинейности наблюдается рост значений эффективной вязкости в приосевой зоне течения. Изменение эффективной вязкости в периферийной и пристеночной части течения крайне незначительно. Причины вызывающие такое изменение эффективной вязкости те же, что и при течении псевдопластической жидкости Оствальда – де Вейля. Уменьшение скоростей сдвиговых деформаций в приосевой зоне течения по мере гидродинамической стабилизации течения при одном и том же давлении напора соответствует росту значений эффективной вязкости. С увеличением значений

предельного напряжения сдвига также наблюдается увеличение значений эффективной вязкости в приосевой зоне. Приосевая область высоковязкого течения на значительном удалении от входа в канал трансформируется в зону квазитвердого течения. Толщина этой зоны пропорциональна предельному напряжению сдвига. С ростом значений консистенции эффективная вязкость увеличивается во всей области течения, однако наибольший прирост значений эффективной вязкости осуществляется вблизи оси течения.

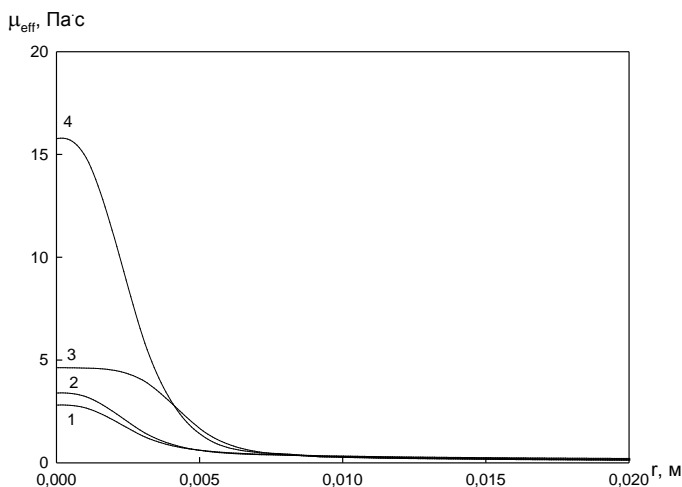


Рис. 3. Радиальное распределение эффективной вязкости в потоке: $u_{in} = 2.5$ м/с, $Ro = 0$ м: $x = 1.5$ м, $\sigma = 1$ Па, $k = 0.5 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$, $1 - n = 0.875$, $2 - 0.75$; $3 - 0.625$; $4 - 0.5$;

Заключение. В результате анализа влияния реологических свойств среды можно сделать следующие выводы:

- течение дилатантной жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой и пристеночной зонах течения;
- повышение значений эффективной при течении дилатантной жидкости с пределом текучести в приосевой зоне объясняется вязкопластическим поведением среды, в пристеночной – дилатантным;
- течение псевдопластической жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой зоне течения;
- повышение значений эффективной при течении псевдопластической жидкости с пределом текучести в приосевой зоне объясняется вязкопластическим поведением среды;
- по мере стабилизации течения и уменьшения скоростей сдвиговых деформаций эффективная вязкость жидкости с пределом текучести в пристеночной зоне уменьшается, а в приосевой – увеличивается, что приводит к формированию зоны квазитвердого течения;
- увеличение значений реологических параметров k , n , σ приводит к увеличению эффективной вязкости потока.

Список литературы

1. Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость и перемешивание. Москва: Наука. - 2005.

2. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. Томск: Изд-во ТГАСУ. - 2015.
3. Кутепов А. М., Полянин Л. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика: справочное пособие. Москва: Бюро Квантум. - 1996.
4. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб: Наука. - 2000.
5. Малкин А.Я., Исаев А.И; *Реология: концепции, методы, приложения.* – СПб: Профессия, 2007. – С.560.
6. Подрябинкин Е.В. Рудяк В.Я. Моделирование течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом // Доклады Академии наук Высшей школы Российской Федерации. - 2012.- № 2. С.112—122.
7. Перминов А.В. Нестационарное движение обобщенной ньютоновской жидкости около твердого тела // Инженерно-физический журнал. - 2014. – Т.87. № 1. - С.139—147.
8. Алексева К.Г., Борзенко Е.И. Структура течения жидкости Шведова – Бингама в канале со скачком сечения // Известия высших учебных заведений. Физика. - 2012. - №7-2. - С.15—19.
9. Борзенко Е.И. Рыльцов И.А., Шрагер Г.Р. Кинематика течения жидкости Балкли – Гершеля со свободной поверхностью при заполнении канала // Известия

- Российской академии наук. Механика жидкости и газа. - 2017. – № 5. - С.53. - т- 64.
10. Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р., Якутенок В. А. Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью при заполнении круглой трубы // Прикладная механика и техническая физика. - 2012. – Т. 53, № 2. - С.53—60.
 11. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-Физический журнал. - 2011. - Т. 84, № 3. - С.544—547.
 12. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-Физический журнал. - 2014. - Т. 87, № 1. - С.192—199.
 13. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. - 2014. - Т. 87. № 5. - С.1129—1137.
 14. Матвиенко О.В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале // Известия высших учебных заведений. Физика. - 2014. - Т. 57. № 8-2. - С.183—189.
 15. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока

- псевдопластической жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. - 2019. - Т. 92, № 1. - С.215—226.
16. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. Numerical investigation of Herschel - Bulkley fluids mixing. В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering. Сер. "International Scientific Conference of Young Scientists: Advanced Materials in Construction and Engineering, TSUAB 2014" 2015. - С.012—034.
17. Матвиенко О. В., Агафонцева М. В., Базуев В. П. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости // Вестн. Томского гос. архит.-строит. ун-та. - 2012. - №. 4. - С.144—156.
18. Матвиенко О.В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью сиско, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2018. - № 55. - С.99—112.

Численное решение задачи о распространении верхового лесного пожара

Коржова А.Ю., Перминов В.А.

Томский политехнический университет, город Томск

e-mail: koralsasha96@gmail.com

Аннотация. В статье приведена постановка и методика численного решения задачи о зажигании полога леса от очага низового лесного пожара. Подход к моделированию основан на использовании нестационарных двумерных уравнений сохранения, которые решаются численно при входных условиях, характерных для крупных лесных пожаров. Система дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями редуцирована к дискретной форме с помощью метода контрольного объема.

Ключевые слова: математическая модель; лесной пожар; уравнение; конечный объем; численный метод

Лесные пожары являются чрезвычайно сложным и разрушительным природным явлением, возникновение и развитие которых зависят от запаса и влагосодержания лесных горючих материалов, метеорологических условий, рельефа местности и других факторов. Общей целью исследования лесных пожаров является более глубокое понимание данного явления [1]. Наиболее опасным видом пожаров являются

верховые. Основные механизмы возникновения различных видов пожаров в лесных массивах до конца не определены. Проведение экспериментальных исследований для изучения лесных пожаров являются опасными и дорогостоящими. Поэтому интерес представляют теоретические методы исследования. Метод математического моделирования дает возможность описывать наиболее важные характеристики лесного массива, приземного слоя атмосферы и условия распространения лесных пожаров [2]. В работе изучается влияние ветра, метеорологических условий, влагосодержания, температуры, времени на скорость распространения верховых лесных пожаров. Математически данная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями. Это известная математическая модель лесных пожаров, предложенная А. М. Гришиным. [3].

Физическая постановка задачи. Предполагаем, что на напочвенном покрове имеется область повышенной температуры, то есть очаг низового пожара, который имеет некие размеры, на определенной высоте, над пологом леса, задана скорость ветра. Под воздействием данного очага горения происходит инертный прогрев лесных горючих материалов в пологе леса, из них испаряется влага, далее происходит пиролиз с выделением конденсированных и летучих продуктов пиролиза, которые затем воспламеняются. Формируется фронт горения, который перемещается по пологу леса под действием

ветра. Схематично данное явление представлено на Рисунке 1 [2].

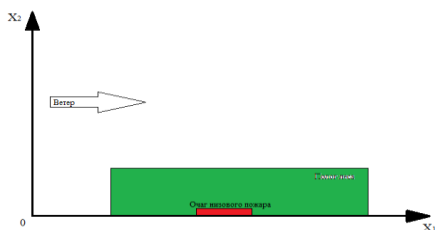


Рис. 1. Схема распространения лесного пожара

Считается, что: 1) течение является развитым турбулентным, при этом пренебрегаем молекулярным переносом, так как он не значителен по сравнению с турбулентным, 2) значение плотности газовой фазы не зависит от давления, в связи с тем, что скорость течения мала относительно скорости звука, 3) имеет место локально-термодинамическое равновесие, 4) над пологом леса задается скорость ветра, 5) учитывается многофазность среды, состоящей из частиц конденсированной и газовой фазы (кислород, газообразные горючие продукты пиролиза и инертные компоненты (азот, пары воды, газообразные продукты горения и др.) [2].

Математическая постановка задачи. Математически поставленная задача может быть сформулирована с помощью следующих уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = m, j = 1, 2, i = 1, 2; \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \bar{v}_i' \bar{v}_j') - \rho s c_d v_i |\bar{v}| - \rho g_i - \dot{m} v_i; \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho c_p \bar{v}_j' \bar{T}') + q_s R_5 - \alpha_v (T - T_s) + k_g (c U_R - 4\sigma T^4) \quad (3)$$

$$\rho \frac{dc_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \bar{v}_j' c_\alpha') + R_{5\alpha} - \dot{m} c_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,3}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_j} \right) - k c U_R + 4k_s \sigma T_s^4 + 4k_g \sigma T^4 = 0, \quad k = k_g + k_s; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^4 \rho_i c_{pi} \varphi_i \frac{\partial T_s}{\partial t} = q_3 R_3 - q_2 R_2 + k_s (c U_R - 4\sigma T_s^4) + \alpha_v (T - T_s); \quad (6)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -R_1, \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -R_2, \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \alpha_c R_1 - \frac{M_c}{M_1} R_3, \rho_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = 0; \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha = 1, p_e = \rho RT \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{M_\alpha}, \nu = (\nu_1, \nu_2), g = (0, g) \quad (8)$$

$$\dot{m} = (1 - \alpha_c) R_1 + R_2 + \frac{M_c}{M_1} R_3 + R_{53} + R_{54}, \quad (9)$$

$$R_{51} = -R_3 - \frac{M_1}{2M_2} R_5, R_{52} = \nu(1 - \alpha_c) R_1 - R_5, \dots$$

Данная система уравнений должна быть решена с учетом начальных и граничных условий [4]:

$$t = 0: v_i = 0, T = T_e, c_\alpha = c_{\alpha e}, T_s = T_e, \varphi_k = \varphi_{ke}, i = \overline{1,2}; k = \overline{1,2}; \alpha = \overline{1,3}. \quad (10)$$

$$x_1 = -x_{1e}: v_1 = V_e(x_2), v_2 = 0, T = T_e, c_\alpha = c_{\alpha e}, -\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_1} + c U_R / 2 = 0. \quad (11)$$

$$x_1 = x_{1e}: \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_1} = 0, -\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_1} + \frac{c U_R}{2} = 0. \quad (12)$$

$$x_2 = 0: v_1 = 0, (\rho v_2) = h_0 m,$$

$$T = T_s = \begin{cases} T_e + (T_0 - T_e) \exp(-((x_1 - x_{10}) / \Delta_x)^2) t / t_0, & t \leq t_0 \\ T_e + (T_0 - T_e) \exp(-((x_1 - x_{10}) - x_f) / \Delta_x)^2), & t > t_0 \end{cases}$$

$$-\rho D_t \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_2} + \rho v_2 c_\alpha = h_0 R_{5\alpha}, -\frac{c}{3k} \frac{\partial U_R}{\partial x_3} = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)} (4\sigma T_s^4 - c U_R), \quad (13)$$

$$x_2 = x_{2e}: \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial U_R}{\partial x_2} + \frac{c}{2} U_R = 0. \quad (14)$$

где x_1, x_2, v_1, v_2 - координаты и соответствующие проекции вектора скорости на оси д.с.к.; R_5 и $R_{5\alpha}$ - скорости реакций горения газообразных продуктов пиролиза и появления α - компонентов газо - дисперсной фазы; c_p, ρ - удельные теплоемкости и плотность газовой фазы; T - температура газа; c_{α} - массовые концентрации ($\alpha=1$ - концентрация кислорода, 2 - оксида углерода, 3 - инертных компонентов воздуха); P - давление; U_R - плотность энергии излучения; σ - постоянная Стефана-Больцмана; k_g коэффициент поглощения для газодисперсной фазы; q_b, E_b, k_i - тепловые эффекты, энергии активации и предэкспоненты реакции горения продуктов пиролиза; M_{α}, M - молекулярные веса индивидуальных компонентов газовой фазы и воздушной смеси; c - скорость света; α_c, ν - коксовое число и массовая доля горючих газов в массе газообразных продуктов пиролиза; g - гравитационная постоянная. Индексы "o" и "e" относятся к функциям в области горения и на значительном расстоянии от фронта пожара соответственно. Индекс "s" используется для обозначения пульсационных составляющих различных функций. Используемые в постановке задачи термодинамические, теплофизические и структурные величины относятся к лесным горючим материалам соответствующим сосновому лесу: $E_s/R=11500$ К, $k_5 = 3 \cdot 10^{13}$, $q_5 = 10^7$ Дж/кг, $c_p=1000$ Дж/(кг·К), $\alpha_c=0.06$, $\nu=0.7$, $\rho_e = 1.2$ кг/м³, $c_{2e} = 0$, $p_e = 10$ н/м², $T_e = 300$ К, $c_{1e} = 0.23$.

Компоненты тензора турбулентных напряжений $\overline{\rho v_i' v_j'}$

и турбулентные потоки тепла и массы $\overline{\rho v'_j c'_p T'}$, $\overline{\rho v'_j c'_\alpha}$ вычисляются используя градиенты среднего течения в следующем виде:

$$-\overline{\rho v_i v_j} = \mu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij},$$

$$-\overline{\rho v_j c'_p T'} = \lambda_t \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad -\overline{\rho v_j c'_\alpha} = \rho D_t \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j}, \quad (15)$$

$$\lambda_t = \mu_t c_p / Pr_t, \quad \rho D_t = \mu_t / Sc_t; \quad \mu_t = c_\mu \rho K^2 / \varepsilon, \quad (16)$$

здесь $+K$ - кинетическая энергия турбулентности, v_i и v'_i - компоненты средней скорости и пульсационной составляющей скорости в проекции на ось x_i ; μ_t , λ_t , D_t - коэффициенты турбулентной, динамической вязкости, турбулентной теплопроводности и диффузии; Pr_t , Sc_t - турбулентные числа Прандтля и Шмидта; δ_{ij} - символы Кронекера; $\mu_t = c_\mu \rho K^2 / \varepsilon$, где ε - скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, c_μ - константа. Определение коэффициента турбулентной динамической вязкости имеет обусловленные трудности, такие как, произвол при выборе начальных и граничных условий для уравнения кинетической энергии турбулентности, а также представляет интерес приближенный способ замыкания, который основан на гипотезе пути смешения Прандтля, что фактически означает равновесное приближение для уравнения кинетической энергии турбулентности.

Для замыкания системы уравнений компоненты тензора турбулентных напряжений, турбулентные потоки тепла и массы определяются при помощи формул. Используется локально-

равновесная модель турбулентности. Для определения турбулентной динамической вязкости в плоском двумерном случае использовалась формула

$$\mu_t = \rho l^2 \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right]^2 - \frac{g}{T \text{Pr}_t} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right\}^{1/2}, \quad (17)$$

где $\theta = T - T_e$.

Формула для пути смешения, предложенная авторами работы имеет вид

$$l = x_2 k_t / (1 + 2.5 x_2 \sqrt{c_d s / h}), \quad (18)$$

где $k_t = 0.4$ - постоянная Кармана, h - размер полога леса [5].

Результаты расчетов и анализ. В расчетной области высотой 50 метров, а длиной 200 м, задается лесной массив высотой 5 м и длиной 100. В результате численных расчетов были получены распределения полей температуры, скорости и концентрации. В построенной модели температура меняется от начального значения $T_e = 300$ К до температуры горения $T_g = 1500$ К. Рассмотрим два случая, где при первом случае распространение верхового лесного пожара происходит при скорости ветра 8 м/с, а во втором при 10 м/с в определенные моменты времени. Результаты расчетов приведены ниже. Числами 5 – 4; 4 – 3; 3 – 2; 2 – 1,5; 1 – 1,2 обозначены значения изотерм безразмерной температуры.

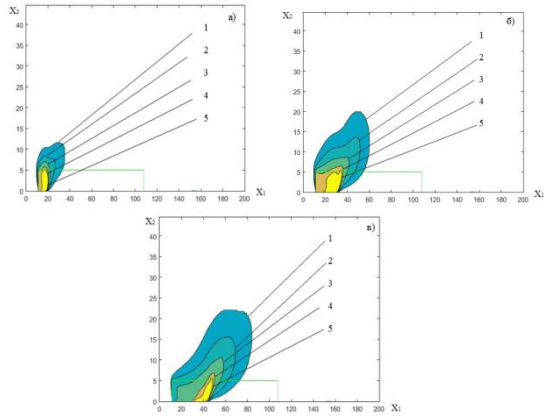


Рис. 2. Распространение верхового лесного пожара при скорости ветра 8 м/с в момент времени 8,10,15 сек

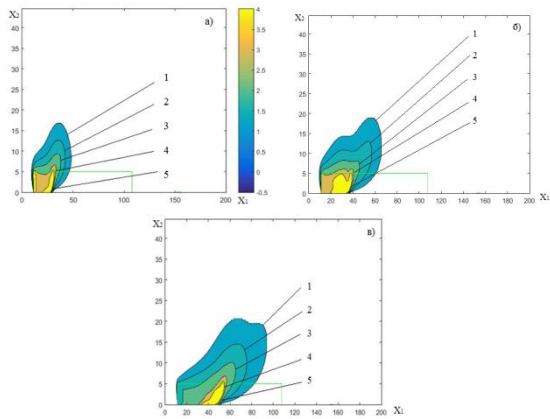


Рис. 3. Распространение верхового лесного пожара при скорости ветра 10 м/с в момент времени 8,10,15 сек

На основе полученных данных был построен график зависимости, скорости распространения фронта пожара от

скорости ветра 5,8,10 м/с и влажосодержании. График приведен на Рисунке 4.

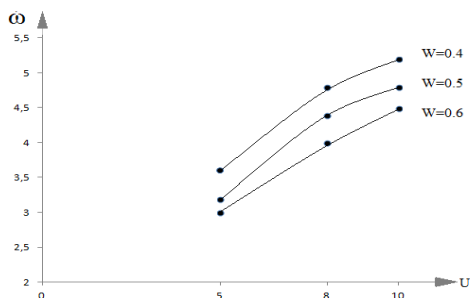


Рис. 4. График зависимости скорости распространения фронта пожара от скорости ветра, 5,8,10 м/с

Данные графика показывают, что с уменьшением влажосодержания, скорость распространения пожара увеличивается, и соответственно с увеличением скорости ветра, скорость распространения пожара также увеличивается. В заключение можно сказать, что было изучено влияние скорости ветра и влажосодержания на скорость распространения фронта верхового пожара. Полученные данные были визуализированы с помощью ПО MATLAB

Список литературы

- [1] Халдина Е.А. Математическое моделирование распространения лесных пожаров с учетом противопожарных преград // Вестник науки Сибири. – 2013. – №4(10). – С.98—103.

- [2] Перминов В. А. Математическое моделирование возникновения верховых и массовых лесных пожаров // Вестник Томского государственного университета. – 2010. – С.283.
- [3] Гришин А.М., Зятнин В.И., Перминов В.А. Экспериментальное исследование перехода низового лесного пожара в верховой // ВИНТИ. – 1991. – № 982-91. – С.22.
- [4] Гришин А.М. Анализ действия лесных и степных пожаров на города и поселки и новая детерминированно-вероятностная модель прогноза пожарной опасности в населенных пунктах // Вестник Томского Государственного Университета. – 2009. – №1(6). – С.41—48.
- [5] Патанкар С.В. Численные метода решения задач теплообмена и динамики жидкости // Энергоатомиздат, – 1984. – С.46—89 .

Изучение в лабораторных условиях взаимодействия горящих и тлеющих частиц природного происхождения с плоской поверхностью различных строительных материалов из древесины¹

Тараканова В. А., Касымов Д. П.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: veronika.tarakanova@mail.ru

Аннотация. В данной работе проведено исследование по поведению образцов древесных строительных материалов (фанера, ориентированно-стружечная плита, древесно-стружечная плита) в результате теплового воздействия от горящих и тлеющих частиц природного происхождения. Вероятность и задержка воспламенения древесины определялись в зависимости от размера и количества горящих частиц, наличия воздушного потока, а также от начальной температуры древесины. Также было получено распределение температуры на поверхности древесины с использованием метода инфракрасной диагностики.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00232)

Ключевые слова: тепловое воздействие, древесные строительные материалы, ИК диагностика, воспламенение.

Лесные пожары являются одной из серьезнейших проблем человечества. Пожары приносят огромный ущерб странам с большими лесными территориями [1].

В ряде случаев определяющую роль в возникновении новых очагов горения играют горящие и тлеющие частицы. Их перенос происходит за счет вовлечения в конвекционную колонку, при этом частицы могут пролетать на расстояние от 40 до 500 м в зависимости от интенсивности пожара. Причем в полете они горят в беспламенном режиме [2]. В дальнейшем они могут попасть внутрь строений, тем самым привести к возгоранию.

Таким образом, одним из поражающих факторов лесных пожаров, являются горящие элементы растительности, которые также могут перейти на территорию городской среды [3].

В строительстве в качестве несущих конструкций, как правило, используют древесину хвойных пород, а как отделочные материалы применяется древесина лиственных пород. Одним из факторов, определяющих пожарную опасность древесины, является ее способность к воспламенению и распространению горения.

Целью настоящей работы является исследование в лабораторных условиях поведения образцов древесных строительных материалов в результате теплового воздействия от горящих и тлеющих частиц природного происхождения.

Для исследования вероятности воспламенения строительных материалов из древесины от горящих и тлеющих частиц, была использована следующая лабораторная установка (рисунок 1). Методика проведения эксперимента, а также основные элементы лабораторной установки по сбросу частиц подробно представлены в работе [4].

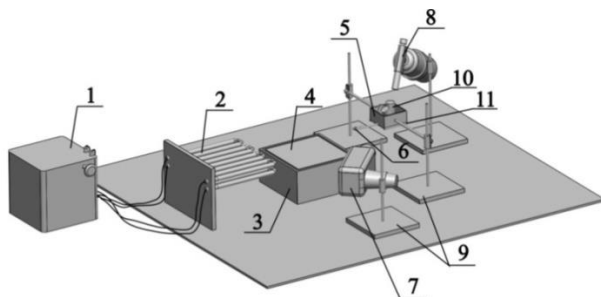


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – лабораторный автотрансформатор; 2 – нагревательный элемент; 3 – поддон; 4 – образец древесины; 5 – кювета; 6 – стопор; 7 – строительный фен; 8 – горелка; 9 – штативы; 10 – образцы частиц; 11 – скоба

Экспериментальное оборудование включало: инфракрасная камера научного класса JADE J530SB с использованием оптического фильтра, с рабочей длиной волны 2.5 – 2.7 мкм, позволяющего регистрировать температуру в диапазоне 300 – 800 °С; видео камера Canon HF R88 для оценки задержки зажигания и фиксации поведения частиц после сброса на поверхности рассматриваемых образцов древесных строительных материалов; анализатор влажности AND MX-50 для контроля влагосодержания исследуемых

образцов; лабораторные весы AND HL 100 для контроля начальной массы частиц и массы образцов древесины.

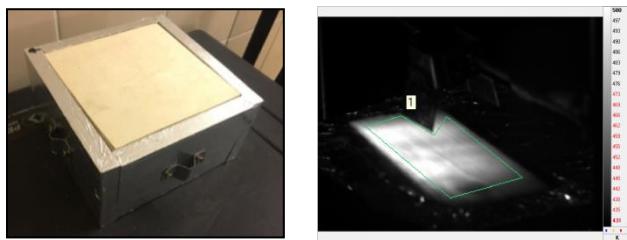
В качестве образцов древесных строительных материалов использовались популярные на рынке фанера, древесно-стружечная плита (ДСП), ориентированно-стружечная плита (ОСП). Основные параметры образцов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры образцов строительных материалов

	Фанера	ОСП	ДСП
Размер, мм	150×150	150×150	150×150
Толщина, мм	21	18	18
Плотность, кг/м³	650–690	570-590	570-590

Образцы изолировались от окружающей среды теплоизоляционным материалом таким образом, чтобы подверженной тепловому воздействию от падающих частиц оставалась одна из поверхностей. Фотография образца перед экспериментом представлена на рисунке 2.

В экспериментах моделировались условия, когда деревянное строение подвергается воздействию теплового потока от надвигающегося фронта лесного пожара [4, 5]. Образец древесины предварительно нагревали до температуры 200 – 220 °С в течение 4 минут [6, 7].



а
б

Рис. 2. Подготовка образцов: а – фотография образца перед экспериментом; б – термограмма образца древесины после нагрева

Температура при нагреве на поверхности древесины контролировалась при помощи инфракрасной камеры. Съемка производилась в спектральном интервале 3.1–3.3 мкм. Данный интервал позволяет работать с объектами, имеющими температуру в диапазоне 200 – 800 °С. На рисунке 2 представлена термограмма образца древесины в результате нагрева тэном и полученные с помощью программного обеспечения Altair минимальная (441 К), максимальная (505 К) и средняя (479 К) температура на поверхности образца (в выделенной области 1 на термограмме).

Ранее в работе [8] было установлено, что чаще всего в крупном лесном пожаре образуются горящие частицы коры и веток. В настоящем эксперименте в качестве частиц, использовались прямоугольные рейки, по размеру совпадающие с типичными размерами частиц, определенных в ходе натурных экспериментов [8]. Фотографии образцов представлены на рисунке 3.

Длина частиц в данном эксперименте составляла: $(20\pm 2;$ $40\pm 2;$ $60\pm 2)$ мм. Влажесодержание частиц не превышало 10 %, для образцов древесных строительных материалов оно составило 6–8 %.



Рис. 3. Модельные частицы

В проведении исследований особый интерес вызывают тлеющие частицы, которые воздействуют на поверхность образца. В данных экспериментах моделируется случай, когда тлеющие частицы, которые образуются во время природного пожара, могут накапливаться на крыше и в углах зданий, заборах или найти способ попасть внутрь помещений и привести к их воспламенению.

Предварительно было подобрано оптимальное время розжига частиц, при котором достигалась фаза тления частиц [9]. Время воздействия горелками на частицы зависело от размера частиц и их количества. Температура частиц контролировалась с помощью инфракрасной камеры JADE J530SB.

В реальных условиях воздействие горящих частиц на напочвенный покров и различные деревянные конструкции сопровождается рядом природных факторов, в частности, действием нагретого воздушного потока от фронта лесного пожара. В экспериментах тлеющие частицы, сбрасываемые на

образцы древесины, обдувались с помощью теплового фена, марки Интеркол ФЭ2000-Э, потоком нагретого воздуха со скоростью составляющей 1.5 м/с, 2 м/с и 2.5 м/с с соответствующими температурами 40 °С, 60 °С и 110 °С. При помощи насадки поток воздуха направлялся на поверхность образца древесины в область сброса частиц.

Серия опытов начиналась с одной тлеющей частицы, затем двух и так до 10 частиц, тем самым имитировалось зажигание древесины как от одной частицы, так и в случае «огненного дождя». Для каждого эксперимента проводилось по три повторения. Если хотя бы в одном из трех случаев происходило воспламенение, считалось, что образец древесины воспламеняется. Под зажиганием понималось появление пламени на поверхности образцов древесных строительных материалов с последующим устойчивым горением.

Результаты эксперимента. Установлено, что в диапазоне скоростей ветра 0 – 1 м/с воспламенения образцов не наблюдалось.

В результате серии экспериментов проведена оценка вероятности воспламенения предварительно нагретой поверхности образцов фанеры, ДСП, ОСП в зависимости от размеров горящих и тлеющих частиц и их количества, взаимодействующих с этой поверхностью, при различной скорости ветра (рисунок 5).

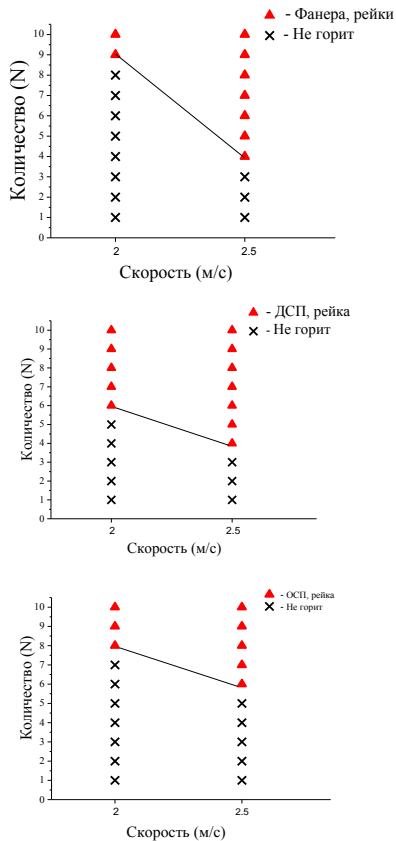


Рис. 5. Зависимость воспламенения образцов древесины строительных материалов от размера и количества тлеющих частиц при скоростях воздушного потока 2 м/с и 2,5 м/с

Анализ графиков показывает, что с ростом скорости ветра вероятность воспламенения древесины частицами одного и того же размера растет. В частности, при увеличении скорости ветра с 2 до 2.5 м/с минимальное количество частиц длиной $L = 40$ мм, достаточных для воспламенения древесины,

уменьшается с 7 до 3 частиц. Также на процесс воспламенения древесины влияет количество частиц.

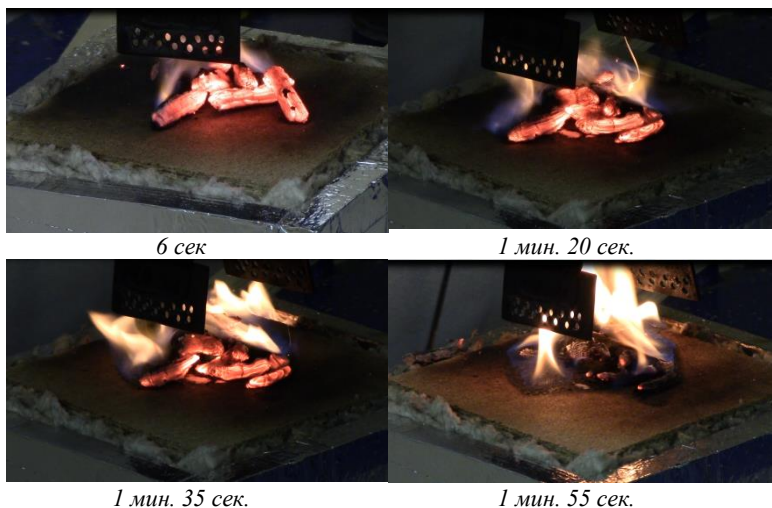


Рис. 6. Группа снимков по влиянию частиц на образец ДСП

На рисунке 6 показана типичная группа снимков по зажиганию частицами образца из ДСП, на поверхность которого сбрасывались тлеющие частицы длиной 40 мм в количестве 10 штук. Скорость воздушного потока составляла 2.5 м/с. Следует отметить, что переход частиц из тлеющей фазы в пламенную возникает вследствие притока окислителя от теплового фена. В частности, в данном случае (рис. 6) переход произошел уже на 6-й секунде, что в последующем приводило к горению ДСП по поверхности.

Ранее в работе [5] проводился эксперимент по зажиганию образцов древесины из строительной доски сосны в результате воздействия горящих и тлеющих частиц коры сосны. Методика

проведения эксперимента аналогична. В результате был сделан вывод о том, что вероятность воспламенения образцов древесины растёт с увеличением размера частиц, а также с увеличением скорости воздушного потока. На основании этого был выбран размер прямоугольных реек (длиной 40 мм), близкий по размерам с частицами коры сосны, имеющей наибольший зажигательный потенциал при выбранных параметрах эксперимента (30×30 мм и толщиной 5 мм).

На рисунке 7 представлены графики сравнения времен задержки зажигания древесины сосны и строительных материалов (фанера, ОСП и ДСП) в зависимости от количества частиц при скоростях воздушного потока 1,5 м/с, 2 м/с и 2,5 м/с.

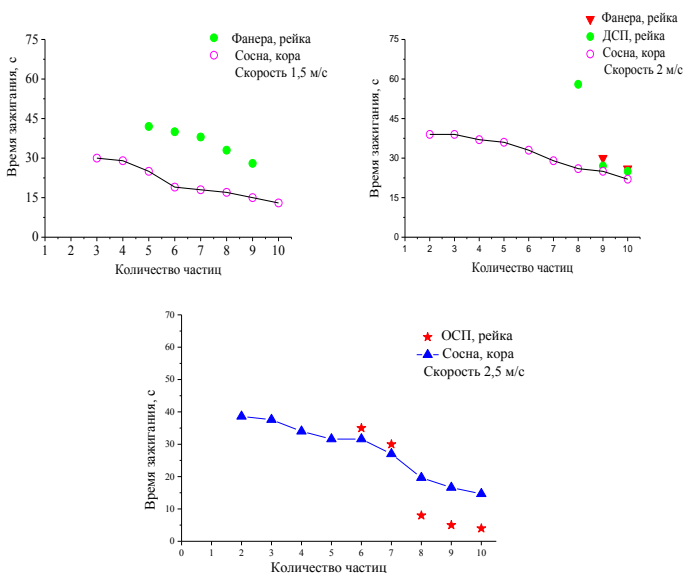


Рис. 7. Времена задержки зажигания древесины сосны и строительных материалов

Из анализа графиков (рис. 7) наблюдается тенденция уменьшения времени зажигания образцов с увеличением количества частиц. Видно, что в случаях с образцами из Фанеры и ДСП времена зажигания близки ко временам зажигания древесины сосны в случае частиц коры, а в случае с ОСП наблюдается на большом количестве частиц (8–10 частиц) время зажигания существенно снижается, более чем в 2 раза по сравнению с аналогичным экспериментом с сосной. Полученные данные позволяют судить о том, что при выбранных параметрах эксперимента время зажигания снижалось с увеличением воздушного потока, а также с увеличением количества частиц. В целом, рассмотренные строительные материалы из древесины ведут себя при тепловом воздействии аналогичным образом, исключение составляет ДСП.

Выводы. В настоящей работе исследовано поведение образцов древесных строительных материалов (фанера, ОСП, ДСП) в результате теплового воздействия от горящих и тлеющих частиц.

Установлено, что в диапазоне скоростей ветра 0 – 1 м/с воспламенения образцов не наблюдалось. При выбранных параметрах эксперимента рассмотренные строительные материалы из древесины (фанера, ОСП, ДСП) оказались более устойчивыми к зажиганию. По-видимому, это связано с тем, что в составе исследуемых образцов присутствуют дополнительные связующие компоненты (синтетические смолы). Кроме того представленные строительные материалы имеют меньшую

шероховатость поверхности, в отличие от стандартной строительной доски.

Применение ИК-диагностики позволило оценить температуру на поверхности образцов и подобрать оптимальное время нагрева, кроме того, это позволило контролировать фазу тления частиц перед их сбросом.

Список литературы

- [1] Yool S.R., Describing the brush fire hazard in southern California // *Annals of the Association of American Geographers*. - 1985. - V. 75(3). - P.417—430.
- [2] A. Filkov, D. Kasymov, V. Zima, and O. Matvienko Experimental investigation of surface litter ignition by bark firebrands / *AIP Conference Proceedings* 1698, 060004 (2016); <https://doi.org/10.1063/1.4937859>
- [3] Castro R., Modeling Forest Fire Danger From Geographic Information System // *Geographic Information System*. Geocarto International. – 1998. - V. 13. – P.15—23.
- [4] Kasymov D.P., Agafontsev M.V., Perminov V.V., Tarakanova V. A. Studying the resistance to fire of wood under the different type of thermal impact while forest fires // *Proc. SPIE* 10833, 24th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 1083356 (13 December 2018). DOI: 10.1117/12.2504454.
- [5] Kasymov D. and Paletsky A. Effect of a fire retardant on the ignition of pine wood exposed to smoldering particles of pine

bark // EPJ Web Conf. 2017 vol 159 00026. DOI: 10.1051/epjconf/201715900026.

[6] Асеева Р.М., Серков Б.Б., Сивенков А.Б. Горение древесины и ее пожароопасные свойства / Монография. – М. : Академия ГПС МЧС России. – 2010. – С.262.

[7] Babrauskas V. Charring rate of wood as a tool for fire investigations // Fire Safety Journal. - 2005. - V. 40. - P.528—554. doi:10.1016/j.firesaf.2005.05.006.

[8] Filkov A.I., Prohanov S.A., Mueller E., Kasymov D.P. et al. Investigation of firebrand production during prescribed fires conducted in a pine forest // Proc. of the Combustion Institute. – 2017. - 36(2). – P.3263—3270.

[9] Matvienko O.V., Kasymov D.P., Fil'kov A.I., Daneiko O.I. and Gorbatov D.A. Simulation of fuel bed ignition by wildland firebrands // Int. J. Wildland fire. - 2018. - Vol. 27(8). – P.550—561.DOI: 10.1071/WF17083.

Исследование нелинейного поведения растворов полимеров в режиме больших периодических деформации²

Черпакова Н.А.

Алтайский государственный технический университет,
Алтайский государственный педагогический университет,
Барнаул
e-mail: nadja-cherpakova@mail.ru

Аннотация. Изучение поведения течений растворов полимеров в области нелинейной вязкоупругости позволяет более точно оценить адекватность реологических моделей и подробнее описать реологические свойства материала.

В работе для анализа свойств материалов в области нелинейной вязкоупругости используется модифицированная реологическая модель Виноградова-Покровского. В процессе моделирования при увеличении амплитуды деформирования было обнаружено, что нелинейный отклик уже не имеет форму правильной гармоника. При сравнении теоретической и экспериментальных зависимостей наблюдается количественное совпадение расчётной зависимости с экспериментальными данными.

² Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-31-00030 мол_а

Ключевые слова: реология, реологическая модель, нелинейная вязкоупругость, осцилляции, сдвиг, растворы полимеров.

Методы исследования. Испытания при периодических деформациях образца с большой амплитудой (LAOS) широко применяется для исследования нелинейного поведения сложных жидкостей. В случае LAOS напряжение уже не является правильной гармоникой, т.е. при исследовании отклик материала представляет собой различные искаженные синусоидальные волны для различных материалов. Это означает, что данный материал уже не в состоянии реагировать линейным образом на приложенные деформации. Отсюда следует, что материальные функции, такие как G' и G'' больше не имеют никакого смысла. Значительные усилия были приложены для получения полезной информации из экспериментов LAOS.

Увеличение нелинейности отклика материала при увеличении амплитуды деформирования можно наблюдать в первую очередь при непосредственном анализе отклика материала, как зависимости напряжения от времени. В зависимости от свойств материала наблюдается изначально наклон в левую либо правую стороны, при дальнейшем увеличении можно наблюдать появление ступеньки на одном из фронтов. Для удобства и наглядности возможна нормализация отклика, однако данный метод не позволяет количественно оценить нелинейность и сделать вывод о изменении свойств материала при увеличении амплитуды деформирования. В

некоторых работах проводилось исследование именно этим способом, и наблюдалось что, наклон напряжения «вперед» типичен для полимерных расплавов и растворов с линейной цепной структурой, тогда как форма наклона напряжения «назад» характерна для суспензий и расплавов полимера с разветвленными цепями.

Одним из методов исследования LAOS является интерпретация в терминах Фурье-анализа. В работах [1-3] представлено широкое применение анализа Фурье для LAOS в различных системах. Преобразование Фурье представляет внутренние периодические вклады в зависящий от времени сигнал и отображает соответствующие амплитуды и фазы (или действительную и мнимую части) как функцию частоты. Чтобы реализовать этот метод, к сигналу напряжения сдвига $\sigma(t)$ применяется одностороннее дискретное комплексное преобразование Фурье.

Фурье-анализ по своей сути сложен, так как даже для набора данных реальной области времени это преобразование приводит к сложному спектру с действительными и мнимыми компонентами спектра.

Так же для описания нелинейного отклика очень часто используются графические представления, такие как фигуры Лиссажу (рисунок 1). Для случая линейного вязкоупругого поведения данные параметрические зависимости напряжения от деформации, либо напряжения от скорости деформации представляют собой эллипсы с малой осью, которая сужается с увеличением частоты, т.е. меньше энергии рассеивается в

высокочастотной упругой области. При увеличении частоты деформирования, фигуры отклоняются от эллиптической формы. Изменение формы искаженных форм напряжения может быть связана с систематическими изменениями внутренней микроструктуры материала или топологий полимера (линейная или разветвленная цепь). При помощи анализа этих фигур можно сделать выводы о свойствах и характере поведения материала, например, увеличение ширины фигуры указывает на преобладание вязких свойств, над упругими и наоборот.

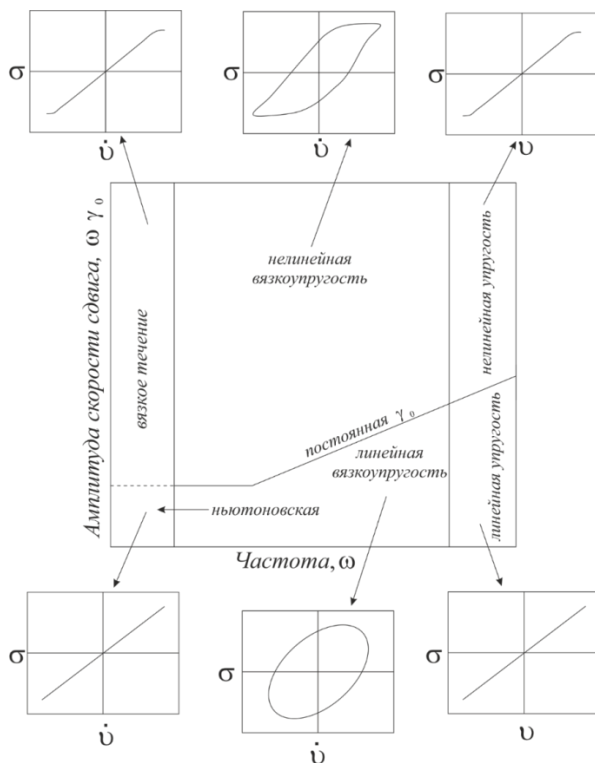


Рис. 1. Диаграмма состояния зависимости сдвигового напряжения от скорости сдвига (или от напряжения сдвига)

На рисунке 1 представлена диаграмма состояния зависимости сдвигового напряжения от скорости сдвига или от напряжения сдвига. Фигуры Лиссажу построенные в координатах напряжение – деформация представляют меру упругости материала, тогда как фигуры, построенные в координатах напряжение – скорость деформации, меру вязкости. Построение фигур Лиссажу в координатах напряжение, деформация, скорость деформации позволяет исследовать свойства материала как в зависимости от амплитуды деформирования, так и в зависимости от частоты.

Главным достоинством данного метода является наглядность представления результатов. На представленной видны предельные состояния материала, то есть в абсолютно упругом и абсолютно вязком материале фигуры Лиссажу вырождаются в отрезок. Такой же результат показывают и модельные расчёты [4].

Реологическая модель. В основу численных расчётов были положены уравнения, записанные на основе модифицированной реологической модели Виноградова-Покровского [5,6]. Для получения данного реологического определяющего соотношения был использован микроструктурный подход, позволяющий проследить связь между макро- и микрохарактеристиками полимерной системы. При этом наиболее результативным в теории вязкоупругости полимера является одномолекулярное приближение, при котором вместо всей совокупности макромолекул в объеме рассматривается одна выбранная макромолекула, движущаяся в

эффективной среде, образованной растворителем и другими макромолекулами [6]. При этом динамика самой выбранной макромолекулы моделируется движением упругой гантели, двумя бусинками, соединенными пружинкой. Особенностью этой модели является учет тензорного характера коэффициента трения бусинок, который определен наведенной анизотропией сдвигового потока. Данная модель имеет вид:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\frac{\eta_0}{\tau_0}a_{ik};$$

$$\frac{d}{dt}a_{ik} - v_{ij}a_{jk} - v_{kj}a_{ji} + \frac{1+(\kappa-\beta)I}{\tau_0}a_{ik} = \frac{2}{3}\gamma_{ik} - 3\frac{\beta}{\tau_0}a_{ij}a_{jk}. \quad (1)$$

Здесь σ_{ik} – тензор напряжений; p – гидростатическое давление; η_0 и τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации для полимерной составляющей; η_1 – остаточная сдвиговая вязкость, учитывающая наличие растворителя; v_{ik} – тензор градиентов скорости; a_{ik} – симметричный тензор анизотропии второго ранга; $I = a_{jj}$ – первый инвариант тензора анизотропии; $\gamma_{ik} = (v_{ik} + v_{ki})/2$ – симметризованный тензор градиентов скорости; κ , β – феноменологические параметры модели, учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка [5]. Отметим, что значения параметров κ и β не являются независимыми $\kappa=1,2\beta$, что соответствует условию независимости асимптотического поведения стационарной сдвиговой вязкости от молекулярного веса полимера.

Ранее это реологическое определяющее соотношение (1), было проверено на соответствие течениям реальных полимерных жидкостей. Результаты расчетов вискозиметрических функций демонстрируют качественное соответствие модели (1) реальному поведению растворов и расплавов линейных полимеров при течении [6].

Сравнение результатов моделирования с экспериментом. Обратимся к экспериментальным данным [7], где исследовали деформацию подвергался 5 % раствора полиэтиленоксида в диметилсульфоксиде. Полимерный раствор подвергался гармонической деформации при большой амплитуде γ_0 , последовательно достигающей значений 50%, 100%, 500%, 1000%, 2000% и 4000% при частоте $\omega = 0,2$ Гц.

При расчётах на основе модифицированной реологической модели Виноградова-Покровского использовались следующие значения параметров модели: $\tau_0 = 0,21$ с; $\eta_0 = 2,76$ Па · с, $\beta = 0,038$, $\kappa = 0,045$.

Эффективность применения модифицированной реологической модели Виноградова-Покровского была проверена путем оптимизации параметров модели в линейной области (при малых периодических деформациях). Далее поведение модели с найденными параметрами сравнивалось с результатами экспериментов, полученными при больших периодических деформациях.

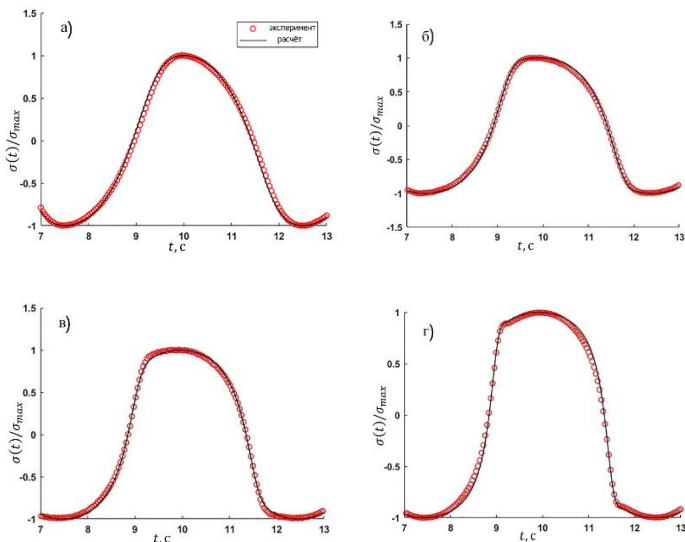


Рис. 2 - Сравнение теоретической и экспериментальных зависимости для нормализованных сдвиговых напряжений $\sigma(t)$ в установившемся режиме при различных относительных амплитудах деформации (а) – 5; б) – 10; в) – 20; г) – 40)

На рисунках 2 приведено сравнение установившихся зависимостей нормализованного отклика с экспериментальными данными. Следует обратить внимание, что левый и правый фронты вынужденных колебаний с ростом относительной амплитуды деформируются по-разному. На левом фронте с увеличением амплитуды на графике экспериментальных зависимостей наблюдается появление «ступеньки». Правый же фронт с ростом γ_0 отклоняется от гармоничности без возникновения ступеньки. Данный эффект модель описывает достаточно точно (рисунок 2).

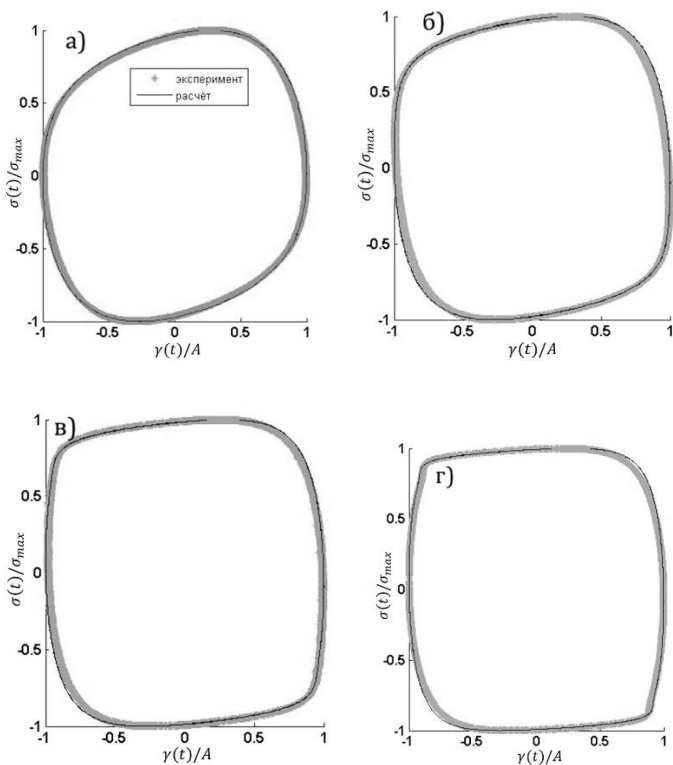


Рис. 3 – Фигуры Лиссажу для теоретических зависимостей и экспериментальных данных для нормализованных сдвиговых напряжений $\sigma(t)$ в установившемся режиме при различных относительных амплитудах деформации (а) – 5; б) – 10; в) – 20; г) – 40)

Рассмотрим теперь, как выглядят фигуры Лиссажу для полученных зависимостей (рисунок 3). При этом отмеченная нелинейность вязкоупругих свойств полимерного расплава проявляется более наглядно, как отклонение замкнутой фазовой

траектории от эллипсоидальной формы. Как видно из приведенных на рисунке 3 графиков увеличение нелинейности отклика образца при увеличении амплитуды колебаний проявляется не только в деформировании исходного эллипса, но и в возникновении на фазовых портретах точек перегиба. Это подтверждают как экспериментальные данные, так и теоретическая зависимость.

Так как измерение проводилось при малой частоте $\omega = 0,2 \text{ с}^{-1} < 1/\tau_0 \text{ с}^{-1}$, то можно отметить преобладание вязких свойств раствора над упругими, что подтверждается большой шириной полученных фигур (рисунок 3).

При проведении сравнения полученных результатов с экспериментальными данными можно сделать вывод, что модель позволяет достаточно точно описать поведение полимерных материалов при больших периодических деформациях.

Список литературы

- [1] Wilhelm, M., D. Maring, and H. W. Spiess, “Fourier-transform rheology” // *Rheol. - Acta* 37. – P.399—405. - 1998.
- [2] Wilhelm, M., P. Reinheimer, and M. Ortseifer, “High sensitivity Fourier-transform rheology” // *Rheol. - Acta* 38. – P.349—356. - 1999.
- [3] Wilhelm, M., P. Reinheimer, M. Ortseifer, T. Neidhofer, and H. W. Spiess, “The crossover between linear and non-linear

mechanical behavior in polymer solutions as detected by Fourier-transform rheology” // Rheol. - Acta 39. – P.241—246. - 2000.

[4] Hyun Kyu A Review of Nonlinear Oscillatory Shear Tests: Analysis and Application of Large Amplitude Oscillatory Shear (LAOS)./ Hyun Kyu, Manfred Wilhelm, Christopher O. Klein, Kwang Soo Cho, Jung Gun Nam, Kyung Hyun Ahn, Seung Jong Lee, Randy H. Ewoldt, and Gareth H. McKinley./ Progress in Polymer Science 36, no. 12 (December 2011). Pp. 1697–175

[5] Pokrovskii V.N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. 2nd Edition. Berlin: Springer. - 2010. - P.184.

[6] Алтухов Ю.А., Головичева И.Э., Пышнограй Г.В. Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент// Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. - 2000. - № 1. - С.3.

[7] Pivokonsky R., Filip P., Zelenkova J. Two Ways to Examine Differential Constitutive Equations: Initiated on Steady or Initiated on Unsteady (LAOS) Shear Characteristics// polymers. 2017. 9. 205

Конечно-разностная схема "Ромб" для численного решения уравнения конвекции-диффузии

Агамасова Е.С., Лаева В.И.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: katyfka.22@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается численное решение одномерной задачи конвекции-диффузии, полученное с помощью неявной разностной схемы «Ромб» [1]. Данная схема имеет ряд достоинств. Так, с её помощью появляется возможность одновременного нахождения функции температуры и теплового потока. Кроме того, уравнение аппроксимируется в пределах одной ячейки, что упрощает использование схемы для тела, состоящего из материалов с различными теплофизическими характеристиками. Схема исследована на монотонность, аппроксимацию и устойчивость. Проведено сравнение численных расчётов и аналитических решений уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: разностная схема, аппроксимация, монотонность, устойчивость, уравнение конвекции-диффузии.

Рассмотрим одномерное уравнение конвекции-диффузии:

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f, a < x < b, t > 0, \quad (1)$$

с начальным условием:

$$t = 0: T(x, 0) = T_n, \quad (2)$$

и граничными условиями: -+

$$\begin{aligned} x = a; \quad \tilde{\beta}_0 \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\alpha}_0 T &= \tilde{\gamma}_0, \\ x = b; \quad \tilde{\beta}_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1 T &= \tilde{\gamma}_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $T(x, t)$ – температура, t – время, x – пространственная переменная, U, α, D – некоторые коэффициенты (кусочно-постоянные) ($\alpha > 0, D > 0$), $\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j$ такие, что $\tilde{\alpha}_j^2 + \tilde{\beta}_j^2 \neq 0$, $j=0,1$.

Требуется в области $\bar{G} = \{(x, t) | a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq t_{max}\}$ определить функцию $T(x, t) \in C_2^1(G) \cap C_1(\bar{G})$, которая будет удовлетворять задаче (1)-(3).

Чтобы найти численное решение поставленной задачи, построим разностную схему. Покроем область \bar{G} сеткой:

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \omega_\tau, \quad \text{где} \quad \overline{\omega_h} = \{x_j | j = \overline{0, N}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}; \quad \omega_\tau = \{t_n | t_n = n\tau, \tau = \frac{t_{max}}{K}, n = \overline{0, K}\}.$$

Обозначим $S = -(D \frac{\partial T}{\partial x})$ (тепловой поток) и перейдем к системе уравнений первого порядка относительно $T(x, t)$ и $S(x, t)$:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} = f(x, t), \\ S = -\left(D \frac{\partial T}{\partial x}\right). \end{cases} \quad (4)$$

Добавим начальное условие (2) и граничные условия (3).

Для системы (4) запишем неявную разностную схему по переменной t :

$$\begin{cases} \alpha \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + U \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^{n+1} = f(x, t), \\ S^{n+1} + D \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Построение разностной схемы для системы (5) будем производить по методу, описанному в работе [1].

Введем вектор $\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$ и запишем (5) в векторно-матричной форме

$$\alpha \bar{\Phi}^{n+1} + A \frac{\partial \bar{\Phi}^{n+1}}{\partial x} = \bar{F}, \quad (6)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} \tau U & \tau \\ \alpha D & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \tau f + \alpha T^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения матрицы A и представим A в виде $M\Lambda M^{-1}$, где M -матрица из собственных векторов матрицы A ,

$$M = \begin{pmatrix} \tau & \tau \\ \mu_1 - \tau U & \mu_2 - \tau U \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

$\mu_1 = \frac{\tau U + \sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau \alpha D}}{2} > 0$, $\mu_2 = \frac{\tau U - \sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau \alpha D}}{2} < 0$ – собственные значения матрицы A .

Преобразуем (6), обозначив $\bar{\Psi} = 2\tau M^{-1} \bar{\Phi}$, где

$$\Psi_1 = \frac{2(-\mu_1 T - \tau S)}{\mu_2 - \mu_1}, \quad \Psi_2 = \frac{2(\mu_2 T + \tau S)}{\mu_2 - \mu_1}, \quad (7)$$

и заменив производные соответствующими разностями.

Запишем разностную схему в ячейке $[x_j, x_{j+1}]$, $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = \overline{0, N-1}$, индекс $j + 1/2$ соответствует середине ячейки

$$\begin{cases} (\alpha \Psi_1^{n+1})_{j+1/2} + \mu_{1j+1/2} \frac{(\Psi_1^{n+1})_{j+1} - (\Psi_1^{n+1})_j}{h_j} = \left(\frac{2}{\mu_2 - \mu_1} (-\mu_1(\tau f + \alpha T^n)) \right)_{j+1/2}, \\ (\alpha \Psi_2^{n+1})_{j+1/2} + \mu_{2j+1/2} \frac{(\Psi_2^{n+1})_{j+1} - (\Psi_2^{n+1})_j}{h_j} = \left(\frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \mu_2(\tau f + \alpha T^n) \right)_{j+1/2}. \end{cases} \quad (8)$$

Для замыкания системы (8) необходимо задать граничные условия и соотношения, связывающие Ψ_1 и Ψ_2 с целыми и полуцелыми индексами связи:

$$\begin{cases} (\Psi_1^{n+1})_{j+1/2} = (1 - \varkappa_j)(\Psi_1^{n+1})_j + \varkappa_j(\Psi_1^{n+1})_{j+1}, \\ (\Psi_2^{n+1})_{j+1/2} = \varkappa_j(\Psi_2^{n+1})_j + (1 - \varkappa_j)(\Psi_2^{n+1})_{j+1}, \end{cases} \quad (9)$$

\varkappa_j – весовой параметр схемы ($0 \leq \varkappa_j \leq 1$).

Используя формулы связи (7) и переходя к переменным T и S , получим разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) \left(\frac{(2\varkappa_j - 1)D\alpha}{\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} + \frac{D}{h_j} \right) + \\ \frac{1}{2} (S_{j+1}^{n+1} + S_j^{n+1}) - \frac{(2\varkappa_j - 1)\tau U}{2\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} (S_{j+1}^{n+1} - S_j^{n+1}) = 0 \\ \frac{1}{2} (T_{j+1}^{n+1} + T_j^{n+1}) + \left(\frac{(2\varkappa_j - 1)\tau U}{2\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} + \frac{\tau U}{ah_j} \right) (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) + \\ \left(\frac{(2\varkappa_j - 1)\tau}{\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} + \frac{\tau}{ah_j} \right) (S_{j+1}^{n+1} - S_j^{n+1}) = \left(\frac{\tau}{\alpha} f + T^n \right)_{j+1/2} \end{array} \right. \quad (10)$$

Исследуем схему (10) на монотонность [2]. По определению трехточечная разностная схема вида $AT_{k+1} - CT_k + BT_{k-1} = W$ является монотонной, если выполнены следующие условия: $A > 0$, $B > 0$, $C - A - B > 0$.

В случае равномерной сетки схему (10) можно привести к трехточечному виду:

$$-T_{j+1}^{n+1}(pv - \hat{q}\hat{U}) + T_j^{n+1}(2pv + \check{q}\hat{U} + \hat{q}\check{U}) - T_{j-1}^{n+1}(-\check{q}\check{U} + pv) = -\check{U}w_{j-1} + \hat{U}w_j, \quad (11)$$

где

$$p = \frac{(2\alpha-1)D\alpha}{\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} + \frac{D}{h}, \quad \hat{U} = \frac{1}{2} + \frac{(1-2\alpha)\tau U}{2\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}}, \quad \check{U} = \frac{1}{2} - \frac{(1-2\alpha)\tau U}{2\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}},$$

$$\hat{q} = \frac{1}{2} + \frac{(2\alpha-1)\tau U}{2\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} + \frac{\tau U}{ah}, \quad \check{q} = \frac{1}{2} - \frac{(2\alpha-1)\tau U}{2\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} - \frac{\tau U}{ah}, \quad v = \frac{(2\alpha-1)\tau}{\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}} + \frac{\tau}{ah},$$

$$w_j = \left(\frac{\tau}{\alpha} f + T^n \right)_{j+1/2}, \quad h, \alpha, D, \tau, \alpha = const,$$

тогда $A = pv - \hat{q}\hat{U}$, $B = -\check{q}\check{U} + pv$, $C - A - B = \check{q}\hat{U} + \hat{q}\check{U} + \hat{q}\hat{U} + \check{q}\check{U} = 1$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$ условия $A > 0$, $B > 0$ выполняются при $\tau > \frac{\alpha h^2}{2b}$, $b = \min(2D - hU, 2D + hU)$, что накладывает соотношение на шаг по пространству: $0 < h < \left| \frac{2D}{U} \right|$.

При $\alpha = 1$ схема (10) монотонна для любых h и τ .

Исследуем схему (10) на аппроксимацию. Предположим, что решение разностной задачи $T(x, t) \in C_4^3(G)$. Пусть L – дифференциальный оператор задачи (1) – (3), $L_{h\tau}$ – разностный оператор (система (10)). Введем норму $\|y\|_{h\tau} = \max_{t \in \omega_\tau} \|y(t)\|_h$.

При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ разностная схема (10) имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй - по пространственной переменной:

$$\|LT - L_{h\tau}T\| = O(\tau) + O(h^2).$$

При $\varepsilon = 1$ происходит потеря порядка аппроксимации:

$$\|LT - L_{h\tau}T\| = O(h) + O\left(\frac{h}{\tau}\right) + O\left(\frac{h^2}{\tau^2}\right) + O\left(\frac{h^2}{\tau}\right) + O(\tau).$$

Исследование на устойчивость по начальным данным проведем методом гармоник [3], для этого решение будем искать в виде

$$T_j^n = \lambda^n e^{i\varphi j}, \quad (12)$$

где λ – спектральный радиус, i – мнимая единица, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Подставляя (12) в (11), при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ получим формулу перехода для температуры T с n на $n+1$ слой:

$$T_j^{n+1}(h^2 q^2 + 2\tau h U q - 4\tau) = h^2 q^2 T_j^n,$$

$$\text{где } q = \frac{z+1}{z-1} = -ictg\left(\frac{\varphi j}{2}\right).$$

Тогда спектральный радиус

$$|\lambda| = \frac{h^2 ctg^2\left(\frac{\varphi j}{2}\right)}{\left|h^2 ctg^2\left(\frac{\varphi j}{2}\right) + 4\tau + i2\tau h U ctg\left(\frac{\varphi j}{2}\right)\right|} < 1.$$

Проделив аналогичные операции для $\varepsilon = 1$, получим

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{Re1^2 + Im1^2}{Re2^2 + Im2^2}},$$

где

$$Re1 = h^2(\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D)ctg^2\left(\frac{\varphi_j}{2}\right);$$

$$Im1 = -h^2\tau U\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}ctg\left(\frac{\varphi_j}{2}\right);$$

$$Re2 = h^2(\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D)ctg^2\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) + 2\tau^2 U^2 h^2 + \\ 2\tau^2 U^2 h\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D} + 4\tau h^2 + 8\tau h\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D} + \\ 4\tau(\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D);$$

$$Im2 = h\tau U\sqrt{\tau^2 U^2 + 4\tau\alpha D}ctg\left(\frac{\varphi_j}{2}\right).$$

$Re1^2 + Im1^2 < Re2^2 + Im2^2$, следовательно, $|\lambda| < 1$.

Таким образом, разностная схема абсолютно устойчива по начальным данным при $\varkappa=1/2$ и $\varkappa=1$.

Для численного решения системы (10) был построен алгоритм метода прогонки. Прямой ход заключается в вычислении прогоночных коэффициентов по формулам:

$$\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0, \beta_0 = \tilde{\beta}_0, \gamma_0 = \tilde{\gamma}_0,$$

$$\Delta_j = \alpha_{j-1}\tilde{U}_{j-1} + p_{j-1}\beta_{j-1} \neq 0,$$

$$\alpha_j = \hat{q}_{j-1} + \frac{\check{q}_{j-1}\beta_{j-1}p_{j-1} + v_{j-1}p_{j-1}\alpha_{j-1}}{\Delta_j},$$

$$\beta_j = v_{j-1} + \frac{\check{q}_{j-1}\beta_{j-1}\hat{U}_{j-1} + v_{j-1}\hat{U}_{j-1}\alpha_{j-1}}{\Delta_j},$$

$$\gamma_j = w_{j-1} - \frac{\check{q}_{j-1}\gamma_{j-1}\tilde{U}_{j-1} - v_{j-1}p_{j-1}\gamma_{j-1}}{\Delta_j}, j = 1, \dots, N.$$

Обратный ход – нахождение температуры и теплового потока:

$$T_N = \frac{\gamma_N \tilde{\beta}_1 - \beta_N \tilde{\gamma}_1}{\alpha_N \tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1 \beta_N}, S_N = \frac{\alpha_N \tilde{\gamma}_1 - \gamma_N \tilde{\alpha}_1}{\alpha_N \tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1 \beta_N},$$

$$T_j = \frac{\gamma_j \tilde{U}_j + \beta_j (p_j T_{j+1} + \tilde{U}_j S_{j+1})}{\Delta_{j+1}}, S_j =$$

$$= \frac{-\alpha_j (p_j T_{j+1} + \tilde{U}_j S_{j+1}) + p_j \gamma_j}{\Delta_{j+1}},$$

где $j = N - 1, \dots, 0$.

Для проведения численного эксперимента рассматривались две задачи с известными аналитическими решениями.

Задача 1. Полуограниченное тело с граничным условием третьего рода на правом конце (безразмерная формулировка). Дано уравнение

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (13)$$

с начальным условием $t = 0 : \theta = 0$

и граничными условиями $x = 0 : \frac{\partial \theta}{\partial x} = Bi(\theta - 1), x \rightarrow \infty : \frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow 0, (14)$

где Bi – коэффициент Био.

Аналитическое решение задачи (13) – (14) получено Гольдиным В.Д. и используется с разрешения автора:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2(Bi + 1)} \left((Bi + 1) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + t}{2\sqrt{t}} \right) + Bi * e^{-x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - t}{2\sqrt{t}} \right) - (2 * Bi + 1) * e^{(Bi(Bi+1)t + Bi*x)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{t}}{2} \right) \right),$$

$$0 \leq x < \infty, t > 0,$$

где $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-z^2} dz$.

На рисунке 1 представлен график зависимости аналитического и численного решений от времени на поверхности тела в точке $x = 0$ при $Bi = 1$. Сплошной линией показывается аналитическое решение, а сплошной с треугольниками обозначено численное решение. Как видно из графика, с течением времени погрешность уменьшается.

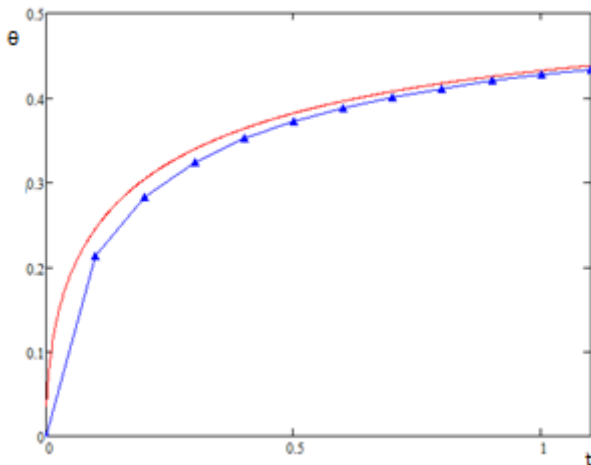


Рис. 1. Зависимость аналитического и численного решения от времени в точке $x=0$

Задача 2. Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2te^x \quad (15)$$

с начальным условием $t=0$: $T(x,0) = 0$

и граничными условиями:

$$\begin{cases} x=a: & T = t^2 e^a, \\ x=b: & T = t^2 e^b, \end{cases} [a, b] = [0,1]. \quad (16)$$

Задача (15) – (16) имеет аналитическое решение: $T(x, t) = t^2 e^x$.

На рисунках 2 и 3 приведена зависимость аналитического и численного решения от координаты x в моменты времени $t=0.5$ с и $t=1$ с. Сплошной линией показано аналитическое решение, сплошной с точками – численное решение. Как видно из графиков, с течением времени максимальная погрешность уменьшается.

Таким образом, численные решения краевых задач для уравнения конвекции-диффузии, полученные с помощью построенного метода, хорошо согласуются с аналитическими решениями.

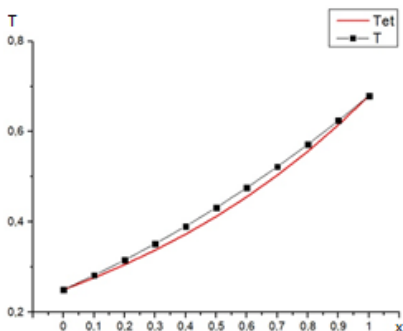


Рис. 2. Зависимость аналитического и численного решения от x
в момент времени $t=0.5$ с

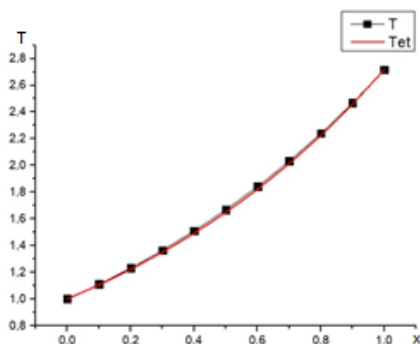


Рис. 3. Зависимость аналитического и численного решения от x
в момент времени $t=1$ с

Список литературы

- [1] Гаджиев А. Д. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. / Гаджиев А. Д., Писарев В.Н.//Журнал вычислительной математики и математической Физики. - 1979. - Т.19. - С.1288—1303.
- [2] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. - 1977. – С.656.
- [3] Годунов С.К. Разностные схемы/ С. К. Годунов, В. С. Рябенский. М.: Наука. - 1977. – С.439.

Применение сингулярного разложения для сжатия изображений и решения плохо обусловленных систем линейных уравнений

Афанасьева А.А., Старченко А.В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: afanaseva_anyutka@inbox.ru

Аннотация. Данная статья посвящена применению сингулярного разложения матриц для сжатия изображений и решения плохо обусловленных систем линейных уравнений. Для сжатия изображений показана возможность существенного сокращения требуемого объема памяти для хранения изображений без существенной потери качества их представления. Для плохо обусловленных систем линейных уравнений используется усеченная сингулярная декомпозиция для решения приведенной системы линейных уравнений с матрицей, имеющей меньшее значение числа обусловленности. Этот метод не требует дополнительных сведений о свойствах матрицы. В качестве примеров используются системы с Гильбертовой матрицей.

Ключевые слова: SVD–разложение, сингулярные числа, сжатие изображения, матрица Гильберта, число обусловленности.

Сингулярное разложение (Singular Values Decomposition, SVD) является удобным методом при работе с матрицами. Сингулярное разложение показывает геометрическую структуру матрицы и позволяет наглядно представить имеющиеся данные [1].

Сингулярное разложение используется при решении самых разных задач — от приближения методом наименьших квадратов и решения систем уравнений до сжатия и распознавания изображений.

Усеченное сингулярное разложение матриц хорошо подходит для решения плохо обусловленных систем линейных уравнений.

Определение 1. Сингулярное разложение - это разложение прямоугольной вещественной или комплексной матрицы в виде $A = U\Sigma V^T$, где Σ - диагональная $m \times n$ -матрица с диагональю из невозрастающих сингулярных чисел $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ а U и V - ортогональные, соответственно $m \times m$ и $n \times n$ - матрицы [1].

Определение 2. Сингулярными числами вещественной $m \times n$ -матрицы A называются действительные квадратные корни из собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ матриц $A^T A$ и $A A^T$, где $k = \min \{m, n\}$.

Сингулярные числа обозначаются буквой σ и нумеруются в порядке убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$.

Применение сингулярного разложения при сжатии изображения. Один из наиболее эффективных методов сжатия

изображений — это SVD-алгоритм на основе сингулярного разложения матриц [1]. Исходная идея метода: разложение исходной таблицы пикселей $A(m \times n)$ с помощью SVD в виде $A = U\Sigma V^T$. В матрице Σ выделяются первые r строк и столбцов, а оставшиеся исключаются. Первые r самых значимых сингулярных чисел называются главными компонентами.

Тогда можно реконструировать исходную матрицу с использованием меньшего объема входной информации:

$$A(m \times n) = U(m \times r)\Sigma(r \times r)V(r \times n), r \leq k.$$

Критерием качества восстановления матрицы A служит близость к единице коэффициента детерминации, рассчитываемого по формуле[2]:

$$Q(r) = \frac{\sum_{k=1}^r \lambda_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k},$$

где λ_k - собственные значения матрицы AA^T . Зависимость коэффициента детерминации от числа главных компонент позволяет оценить эффективность алгоритма.

В качестве примера для анализа эффективности SVD - алгоритма использовалось изображение, полученное в результате магнитно-резонансной томографии. Размер изображения — 620×413 пикселей. Представленное на рисунке 1(a) — это исходное изображение.

На рисунках 1(b)-(d) продемонстрировано применение SVD - алгоритма с использованием различного числа главных компонент r , позволяющее качественно оценить результат сжатия изображения и качества его восстановления. При $r = 4$ (Рис.1 (b)) реконструкция информативной не является, но объем изображения уменьшился в 144 раза, при $r = 20$ (Рис.1 (c))

прослеживается характер изображения, но мелкие детали практически не различимы и объем изображения уменьшился в 29 раз. При $r = 100$ (Рис.1 (d)) уже трудно отличить реконструкцию от оригинала, точности восстановления достаточно для получения необходимой информации и объем изображения уменьшился в 5 раз.

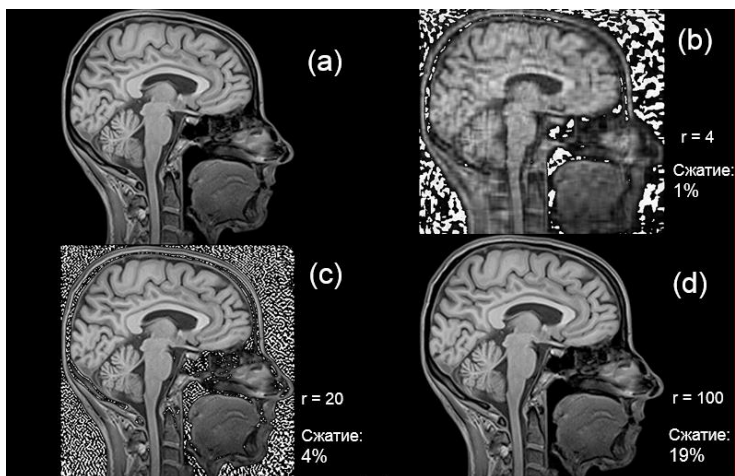


Рис. 1. Исходное изображение до декомпозиции (a), восстановленное изображение (b) – (d) с числом главных компонент: (b) — $r = 4$; (c) — $r = 20$; (d) — $r = 100$

В качестве второго примера рассмотрим фотографию Главного корпуса ТГУ. Размер изображения — 711×372 пикселей. Представленное на рисунке 2(a) – это исходное изображение.

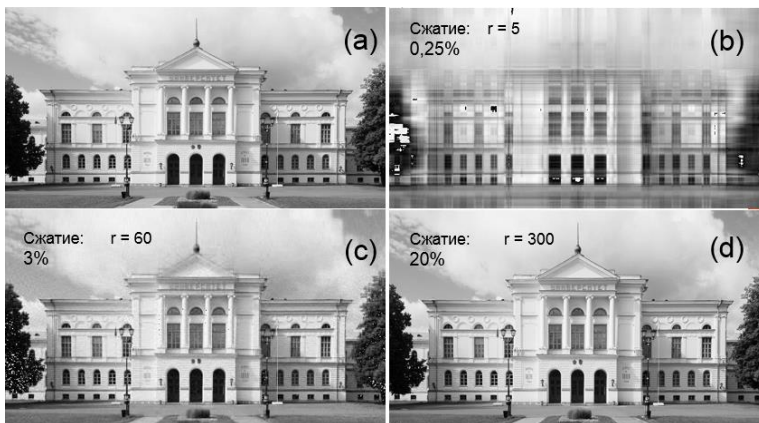


Рис. 2. Исходное изображение до декомпозиции (а),
восстановленное изображение (b) – (d) с числом главных
компонент: (b) — $r = 5$; (c) — $r = 60$; (d) — $r = 300$

На рисунках 2(b)-(d) продемонстрировано применение SVD - алгоритма с использованием различного числа главных компонент r , позволяющее качественно оценить результат сжатия изображения и качества его восстановления. При $r = 5$ (Рис.2 (b)) реконструкция информативной не является, но объем изображения уменьшился в 100 раза, при $r = 20$ (Рис.2 (c)) прослеживается характер изображения, но мелкие детали практически не различимы и объем изображения уменьшился в 8 раз. При $r = 100$ (Рис.2 (d)) уже трудно отличить реконструкцию от оригинала, точности восстановления достаточно для получения необходимой информации и объем изображения уменьшился в 2 раза.

Для численного подтверждения полученных результатов приведены графики зависимости коэффициентов детерминации

от числа главных компонент (Рис.3). Видно, что чем больше r , тем критерий качества приближается к 1 и чем доказывает, что качество восстановления изображения будет сохраняться. Преобладание мелких деталей рис.1-2 (а) приводит к необходимости использования большего числа главных компонент для получения изображения требуемого качества.

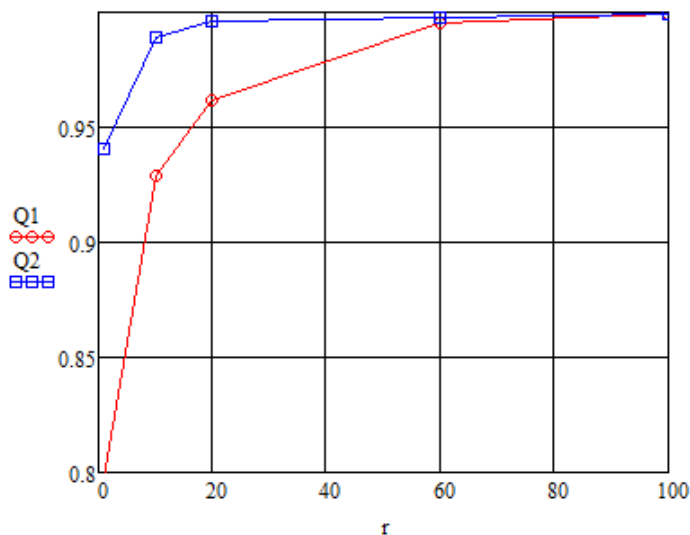


Рис. 3. Графики зависимости коэффициента детерминации Q1 и Q2 от числа главных компонент r для рис.1-2

Из рис.3 видно, что при $r=4-5$ имеется явное различие коэффициента детерминации от 1, при $r=60$ и $r=80$ $Q(r) \rightarrow 1$.

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что сжатие изображения через сингулярное разложение приводит к уменьшению размера изображения в байтах без потери качества при исключении малозначимых компонент.

Использование сингулярного разложения для плохо обусловленных систем линейных уравнений. Метод сингулярного разложения матриц рассматривается как наиболее эффективный метод анализа чувствительности к погрешностям матриц неполного ранга или близких к вырождению, а также его применение для приближенного решения плохо обусловленных систем уравнений большого порядка.

На самом деле метод сингулярного разложения матриц является своеобразным “томографом высокого разрешения”. Этот метод позволяет определить тип и меру обусловленности матриц, вычислить обратную матрицу и оптимальное решение несовместных систем уравнений с матрицами неполного ранга [3].

Существуют различные подходы для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $Ax=b$ (1), но, к сожалению, существующие методы могут привести к неточному решению (1), где A - квадратная матрица размерностью $n \times n$ и плохо обусловлена. Очевидными методами преодоления этой проблемы является масштабирование матрицы A соответствующим образом. Эти методы в основном основаны на различных ранговых разложениях матрицы A . Среди них разложение по сингулярным значениям (SVD) является наиболее общим и надежным.

SVD-разложению матрицы A принимает вид:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T.$$

По найденному разложению матрицы A решение системы определяется следующим образом:

$$x = V\Sigma^{-1}U^Tb = \sum_{i=1}^n v_i \sigma_i^{-1} (u_i^T b).$$

Слабым местом решения SVD является неточное вычисление малых сингулярных значений.

Также СЛАН можно решать через TSVD (Truncated SVD) [4]. Суть данного метода заключается в том, что вычисляются только r вектор-столбцов U и r вектор-строк V^T , соответствующих r наибольшим сингулярным значениям Σ ($r < k$), остальная часть матрицы отбрасывается. Этот метод является более быстрым и экономичным в отличие от SVD, но у него есть минус, TSVD не является точным разложением матрицы A .

Поэтому в работе [5] был предложен метод, позволяющий точно решать СЛАН с помощью TSVD.

Пусть в SVD-разложении можно пренебречь следующими малыми сингулярными значениями: $\varepsilon > \sigma_{r+1} \geq \sigma_{r+2} \geq \dots \geq \sigma_n$. ($\varepsilon = 10^{-8}$). Тогда $x_{TSVD} = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} v_i (u_i^T b)$ (*). Параметр ε определяет версию усеченного SVD (TSVD). Решение TSVD (*) широко используется в качестве упорядоченного решения задачи. Однако решение (*) не является достаточно точным. Это может быть указано следующим образом.

Пусть матрицы левого и правого сингулярных векторов TSVD обозначены как $U_{TSVD} = [u_1, \dots, u_r]$ и $V_{TSVD} = [v_1, \dots, v_r]$, а их ортогональное дополнение $\widetilde{U}_{add} = [\widetilde{u}_{r+1}, \dots, \widetilde{u}_n]$ и $\widetilde{V}_{add} = [\widetilde{v}_{r+1}, \dots, \widetilde{v}_n]$. Тогда решение системы будет выглядеть следующим образом:

$$x = x_{TSVD} + \widetilde{V}_{add} z_2$$

Вектор z_2 находится: $Cz_2 = b_2$, где $C = \widetilde{U}_{add}^T A \widetilde{V}_{add}$, $b_2 = \widetilde{U}_{add}^T b$.

Рассмотрим в качестве примера СЛАУ с матрицей Гильберта, компоненты которой задаются формулой $H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = \overline{1, n}$.

Она относится к числу плохо обусловленных матриц. Характерная особенность этой матрицы в том, что при возрастании ее порядка минимальные собственные числа (сингулярные числа) очень быстро стремятся к нулю.

Решаем систему $H_n x_n = b_n$, где $b_n = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ для $n=8$, $b_n = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ для $n=10$.

Число обусловленности для матрицы H_8 равно $3.387 * 10^{10}$, а для H_{10} равно $3.535 * 10^{13}$.

Таблица 1. Сингулярные числа для матрицы Гильберта $n=8$ и $n=10$

n=8		n=10	
1	1.69594	1	1.75192
2	0.29813	2	0.34293
3	0.02624	3	0.03574
4	0.00147	4	0.00253
5	5.43694e-5	5	0.00013
6	1.29433e-6	6	4.72969e-6
7	1.79887e-8	7	1.22897e-7
8	1.11154e-	8	2.14744e-9
	10	9	2.26675e-
			11
		10	1.09323e-
			13

Получим решения этих плохо обусловленных систем линейных уравнений следующими методами:

- аналитическим методом с помощью пакета Wolfram Mathematica,
- численным методом исключения Гаусса,
- сингулярным разложением (SVD) с помощью программ
 - 1) Библиотеки Intel® Math Kernel Library
 - 2) Программы, разработанной К.Л.Лоусоном (Naval Surface Warfare Center(USA)),
- TSVD-алгоритмом, предложенным Волохом и Вильнеем [5].

Расчеты проводились с двойной точностью, в TSVD пренебрегались по 2 малых сингулярных значения: для n=8 r=6, а для n=10 r=8.

Отклонение от аналитического решения вычислялись по формуле

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{mi} - x_{ai})^2}}{n},$$

где n – количество уравнений, x_{mi} – решение численным методом, x_{ai} – значения аналитического решения.

Таблица 2. Решения для матрицы Гильберта n=8

	Исключение Гаусса	SVD (классический)	SVD (Intel)	SVD (NSWC)	TSVD [5]
Отклонение от аналитического решения	37,5	37.499	0	0	0

Таблица 3. Решения для матрицы Гильберта $n=10$

	Исключение Гаусса	SVD (классический)	SVD (Intel)	SVD (NSWC)	TSVD [5]
Отклонение от аналитического решения	163.645	110.499	137.088	199.707	0

Анализируя полученные данные для разных порядков матрицы Гильберта было замечено, что ближе к аналитическому решению является результат, полученный с помощью TSVD [5], чем выше порядок матрицы, тем она хуже обусловлена и каждый метод стал больше отклоняться от точного решения, как раз это продемонстрировано в таблицах 2-3. Таким образом, TSVD [5] наиболее лучший вариант для нахождения точного решения данной системы.

Список литературы

- [1] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра .М.:Мир. - 2000. – С.430.
- [2] Богданова Н.А., Зыбина Ю.С., Шпакова Е.С. Использование сингулярного разложения матриц для сжатия электронно-микроскопических изображений //Экономические и социально-гуманитарные исследования. - 2016. - № 2 (10). – С.7—11.
- [3] Андрушевский Н.М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, МАКС Пресс. - 2008. – С.71.

[4] <http://langvillea.people.cofc.edu/DISSECTION-LAB/Emmie%27sLSI-SVDModule/p5module.html>

[5] Volokh K. Pin-Pointing Solution of Ill-Conditioned Square Systems of Linear Equations/K.Volokh, O.Vilnay// Applied Mathematics Letters. – 2000. - №13. – P.119—124.

Упаковка оболочки из композитного материала и ее развертывание в условиях невесомости³

Бузмакова Г.В.

ПГНИУ, г. Пермь

e-mail: galina_buzmakova@bk.ru

Аннотация. Рассматривается способ упаковки и развертывания оболочечной конструкции с использованием упругого шарнира. Оболочка сконструирована из упругих элементов, соединенных упругими (гиперупругими) шарнирами. Применяется численно-экспериментальный метод для нахождения материальных характеристик шарнира. Найденные материальные характеристики используются для исследования упаковки и развертывания различных оболочечных конструкций. Приводятся оценки параметров состояния рассматриваемых конструкций: необходимые усилия упаковки, величина упругой деформации шарниров, напряжения в шарнирах и элементах конструкции.

Ключевые слова: численно-экспериментальный метод, эффективные свойства материала, отверждение полимера, композитные материалы

Крупногабаритные конструкции применяются во многих отраслях деятельности человека. Это ангары, рефлекторы

³ Работа выполнена в рамках проекта по гранту РФФИ № 17-41-590649

телескопов, антенны, производственные помещения и т.п. В частности, перспективное применение крупногабаритных конструкций ожидается в освоении космоса [1-3], где крупногабаритные оболочечные конструкции могут служить складскими помещениями, оранжереями, элементами антенных устройств, солнечных батарей и т.п.. В этом случае актуальной является доставка таких конструкций на орбиту. Они должны быть упакованы и подвергнуты разворачиванию непосредственно в космосе. Существует несколько видов таких конструкций, а именно: конструкция из упругих элементов с идеальными шарнирами (пневматический метод разворачивания), конструкция, изготовленная из тонкой пленки (пневматический метод разворачивания), и конструкция из упругих элементов с упругими шарнирами (саморазворачивание).

В работе рассматривается (альтернативный пневматическому) способ упаковки и разворачивания оболочечной конструкции с использованием упругого шарнира. Основной идеей способа разворачивания является накопление упругой энергии в шарнирах при упаковке и высвобождение ее при разворачивании. В качестве упругого шарнира используется не полностью отвердевший препрег. Расчетным путем сложно найти свойства такого материала, поэтому используется численно-экспериментальный метод.

Упругие шарниры из отвердевающего препрега, имеют достаточно высокую податливость на начальном этапе отверждения. Такие конструкции после разворачивания

фиксируют свою форму за счет последующего отверждения. Была проведена серия экспериментов с цилиндрической коробчатой конструкцией, состоящей из жестких пластин (углепластик, полностью отвердевший препрег), с шарнирами-ребрами (не полностью отвердевший препрег) (рисунок 1).



Рис. 1. Экспериментальная установка

В ходе эксперимента измерялись сила, необходимая для полного сложения конструкции по диагонали, и модуль сдвига клея, соответствующий этому моменту времени. Отверждение продолжалось приблизительно 15 часов, поэтому процесс поджатия конструкции полагался мгновенным. Рассматривалось статическое нагружение конструкции с фиксированными для этого момента времени материальными параметрами.

Схематично изобразить процесс упаковки можно следующим образом, рисунок 2. Развертывание осуществляется в обратном порядке.

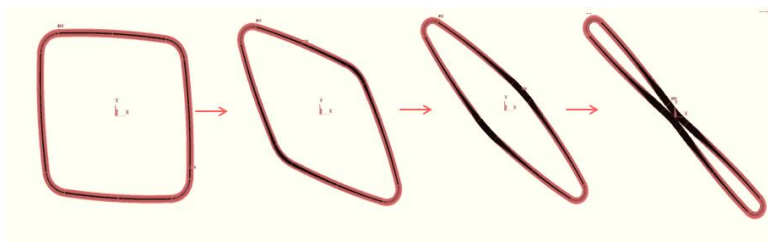


Рис. 2. Этапы упаковки конструкции

По результатам эксперимента построен график (рисунок 3) зависимости величины силы поджатия P от модуля Юнга связующего. Из графика видно, что с увеличением жесткости шарнира величина силы увеличивается. Зависимость силы от модуля Юнга не линейна.

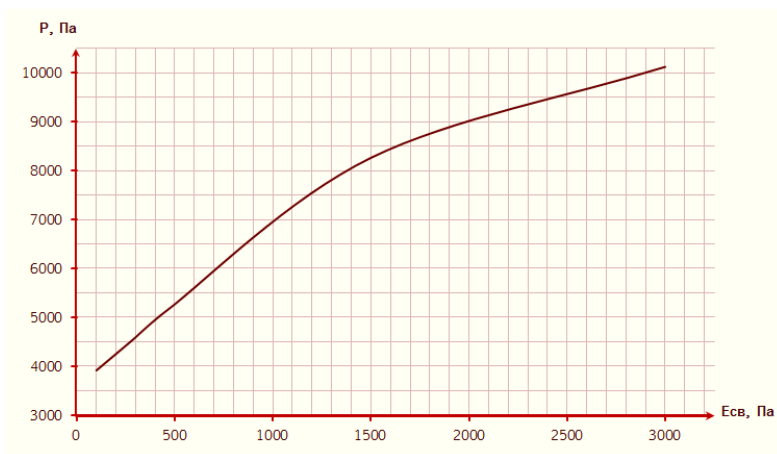


Рис. 3. График зависимости нагрузки P от модуля Юнга связующего

Эффективные свойства шарниров зависят от степени отверждения препрега и определяются численно - экспериментальным методом на примере цилиндрического четырехшарнирного короба.

Для реализации численной части метода выбрана модель гиперупругого материала, его свойства описываются потенциалом Neo Hookean. Модель может быть использована для прогнозирования напряженно-деформированного состояния материалов, испытывающих большие деформации. В отличие от линейных упругих материалов, напряженно-деформированная кривая материала Neo Hookean не является линейной.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$W = \frac{G}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2, \text{ где } J = \frac{V}{V_0}$$

$$d = \frac{2}{k}$$

Модель содержит два параметра. Их определим следующим образом: коэффициент Пуассона задаем 0,48, а второй параметр (это будет эффективный модуль Юнга материала) – цель настоящего исследования, варьируемый параметр, зависящий от степени отверждения материала.

Задача решается в инженерном пакете ANSYS. Короб в эксперименте в нагруженном состоянии уже имеет начальные деформации и напряжения. Для поиска начальных напряжений

режем конструкцию пополам и строим 2 твердые пластины с гиперупругими вставками. Свойства материалов и параметры оболочки представлены на рисунке 4. После «склеивания» верхних и нижних торцов пластин, получаем искомое начальное напряженное состояние, с которого начинаем процесс нагружения. Это начальное состояние будет различным для различных степеней отверждения конструкции. Нагружение проводилось до полного поджатия конструкции по диагонали (как показано на рисунке 2).

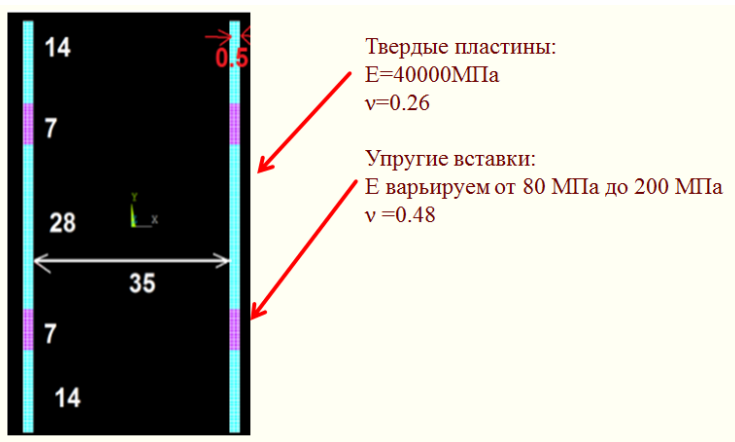


Рис. 4. Параметры оболочки

По результатам многократного решения задачи для различных значений модуля Юнга строится график зависимости нагрузки P от модуля Юнга гиперупругой вставки, рисунок 5.

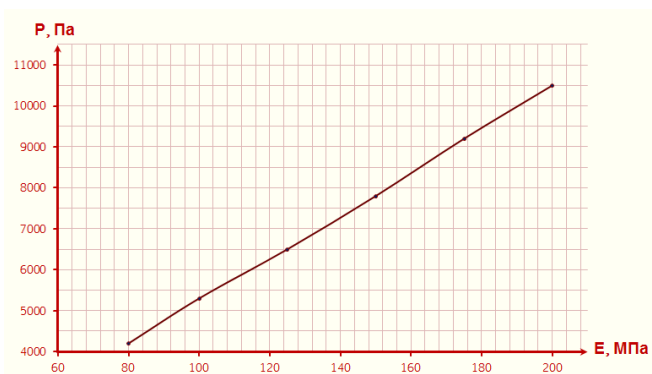


Рис. 5. График зависимости нагрузки P от модуля Юнга гиперупругой вставки

«Склеивая» результаты эксперимента и расчета по значениям силы полного поджатия P , можно получить зависимость эффективного модуля упругости шарнира от свойств связующего (его модуля Юнга), рисунок 6.

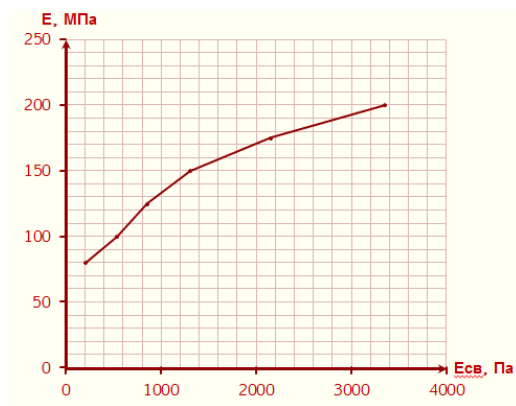


Рис. 6. График зависимости модуля Юнга упругой вставки от модуля Юнга связующего

По графику можно определить какой модуль Юнга упругой вставки стоит взять для определенной степени отверждения связующего.

Найденные материальные характеристики гиперупругого шарнира используются для исследования упаковки и развертывания различных оболочечных конструкций. Рассмотрим конструкцию с различными длинами шарниров (3,5 и 7 мм).

На рисунке 7 и 8 приведены графики зависимости силы P от размера шарнира и модуля Юнга. По графикам видно, что чем меньше длина шарнира, тем больше нагрузка. С увеличением модуля Юнга упругой вставки растет сила полного поджатия.

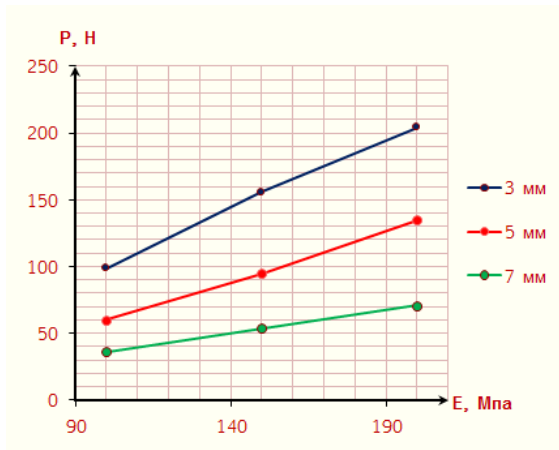


Рис. 7. График зависимости силы P от модуля Юнга упругой вставки

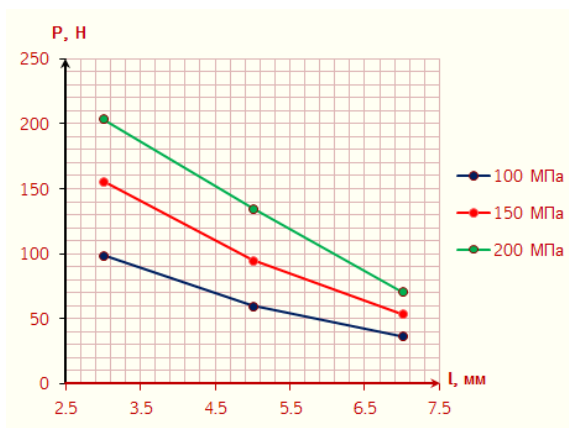


Рис. 8. График зависимости силы P от длины упругой вставки

На рисунке 9 приведены графики зависимости главных растягивающего и сжимающего напряжений от модуля Юнга. По графикам видно, что модули главных напряжений примерно одинаковы (шарниры работают на изгиб). Видим что максимальное напряжение около 60 МПа. Допустимым является 150-200 МПа.

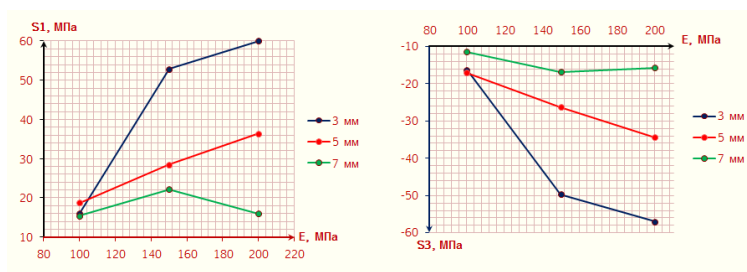


Рис. 9. Графики зависимости первого и третьего главных напряжений от модуля Юнга упругой вставки

Величина деформации при различных размерах шарнира изменяется значительно ($\varepsilon_i[6\% \div 23\%]$), что подтверждает выбор нелинейно упругой модели материала. Деформация возрастает при уменьшении жесткости материала или уменьшении длины шарнира.

Выводы:

1. Показана принципиальная возможность использования в качестве упругого шарнира для развертывания оболочки недоотвержденный препрег;

2. Предложен численно- экспериментальный метод для определения эффективных свойств такого шарнира в зависимости от степени отверждения;

3. Проведен анализ зависимости требуемой для упаковки нагрузки, напряжений и деформаций в зависимости от геометрии шарнира (длина шарнира).

В планах будущего исследования рассмотреть другие способы упаковки и развертывания оболочки, рисунок 10. А так же найти способ перейти к крупногабаритной конструкции.

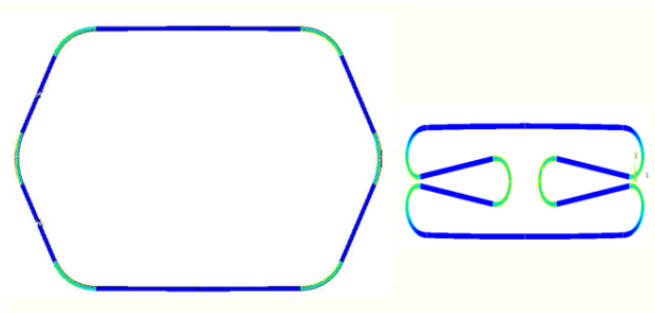


Рис.10. Способы упаковки конструкции

Список литературы

- [1] Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Rusakov S. V., Kondyurin A. V. Deployment of large-size shell constructions by internal pressure // *Mechanics of Composite Materials*. – 2015. – Vol. 51. – N5. – P.629—636.
- [2] Kondyurin A. Direct Curing of Polymer Construction Material in Simulated Earth's Moon Surface Environment // *Journal of spacecraft and rockets*. – 2011. – Том: 48 Выпуск: 2. - С.378—384.
- [3] Kondyurin, A Lauke, B Vogel, R Photopolymerisation of composite material in simulated free space environment at low Earth orbital flight // *European polymer journal*. – 2006. – Том: 42
Выпуск: 10. – С. 2703—2714 DOI:
10.1016/j.eurpolymj.2006.04.018
-

Математическое моделирование и численное исследование процесса самоочищения речного водоема

Давыдов А. С., Михайлов М.Д.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: afoniashka@gmail.com

Аннотация. Рассматривается течение невязкой несжимаемой жидкости на прямоугольном участке канала с гладким дном. Предлагается математическая модель, представляющая собой модификацию моделей Моно [1], Стритера-Фелпса [2,3], Доббинса и Кемпа [4]. Численно исследуется процесс самоочищения на загрязненном участке реки с помощью указанной модели. В качестве разностных методов используются: явная разностная схема и метод конечных объемов. Показано, что схемы аппроксимирует с первым порядком по времени и пространству исходную дифференциальную задачу, условно устойчивы и имеет место сходимост [5]. Приводятся и анализируются результаты численных расчетов.

Ключевые слова: математическая модель, разностная схема, погрешность аппроксимации, устойчивость, сходимост, субстрат, микроорганизмы, дефицит кислорода, метод конечных объемов.

Физическая и математическая постановка задачи.

Течение реки моделируется каналом, имеющим форму, указанную на рис. 1.

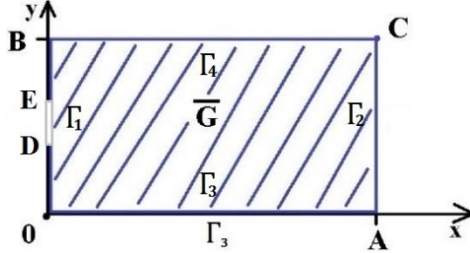


Рис. 1. Расчетная область \bar{G}

По каналу течет жидкость. Параметры, характеризующие течение жидкости и процесс самоочищения, будем считать зависящими от x, y, t . Указанный процесс описывается модификацией моделей Моно, Стритера-Фелпса, Доббинса и Кемпа, которая в области

$$\bar{G} = G \cup \Gamma; \quad G = \{ (x, y) \mid 0 < x < A; \quad 0 < y < B \}; \quad t \in [0, T];$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4; \quad \Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)} \cup \Gamma_1^{(3)}, \quad \text{где}$$

$$\Gamma_1^{(1)} = \{ (x, y) \mid x = 0; \quad 0 \leq y < D \}; \Gamma_1^{(2)}$$

$$= \{ (x, y) \mid x = 0; \quad D \leq y \leq E \};$$

$$\Gamma_1^{(3)} = \{ (x, y) \mid x = 0; \quad E < y \leq B \}; \Gamma_2$$

$$= \{ (x, y) \mid x = A; \quad A \leq y \leq C \};$$

$$\Gamma_3 = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq A; \quad y = 0 \}; \Gamma_4$$

$$= \{ (x, y) \mid B \leq x \leq C; \quad y = B \}$$

представляет собой начально- краевую задачу следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial x} + V \frac{\partial L}{\partial y} = -K_1 L - K_3 L - \frac{\mu_{\max} X L}{Y(K_L + L)} + J_B + D_f \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial X}{\partial t} + U \frac{\partial X}{\partial x} + V \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\mu_{\max} X L}{K_L + L} + D_f \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial D}{\partial t} + U \frac{\partial D}{\partial x} + V \frac{\partial D}{\partial y} = K_1 L - K_2 D - \frac{\mu_{\max} X L}{K_L + L} + J_1 + J_2 - J_3 + D_f \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right); \end{cases} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 L(x, y, 0) = 0; X(x, y, 0) = 1; D(x, y, 0) = 0; (x, y) \in \bar{G}; \\
 L(0, y, t) = \begin{cases} \varphi(y) & , y \in \Gamma_1^{(2)} \\ 0, & y \in \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(3)} \end{cases} \text{ для } 0 < t < 2; \\
 L(0, y, t) = 0, y \in \Gamma_1; 2 \leq t \leq T; \\
 X(0, y, t) = 1; D(0, y, t) = 0; y \in \Gamma_1; 0 < t \leq T; \\
 \frac{\partial L(A, y, t)}{\partial x} = 0; \frac{\partial X(A, y, t)}{\partial x} = 0; \frac{\partial D(A, y, t)}{\partial x} = 0; y \in \Gamma_2; 0 < t \leq T; \\
 \frac{\partial L(x, 0, t)}{\partial y} = 0; \frac{\partial X(x, 0, t)}{\partial y} = 0; \frac{\partial D(x, 0, t)}{\partial y} = 0; x \in \Gamma_3; 0 < t \leq T; \\
 \frac{\partial L(x, B, t)}{\partial y} = 0; \frac{\partial X(x, B, t)}{\partial y} = 0; \frac{\partial D(x, B, t)}{\partial y} = 0; x \in \Gamma_4; 0 < t \leq T;
 \end{array} \right. \quad ($$

2)

где U, V - компоненты вектора скорости течения реки, L - концентрация органического вещества, X - биомасса микроорганизмов, D - дефицит кислорода, K_1 - константа окислительной трансформации органического вещества, K_2 - коэффициент реэрации, K_3 - константа скорости удаления органического вещества путем осаждения на дно, J_1 – скорость убыли кислорода за счет разложения придонных иловых отложений, J_2 – скорость уменьшения растворенного кислорода вследствие дыхания растений, J_3 – скорость поступления кислорода из-за фотосинтеза, J_B – поток органических веществ, вымываемых из донных отложений, μ_{max} – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов, K_L - константа полунасыщения, Y – коэффициент трансформации субстрата в биомассу, D_f - коэффициент диффузии.

Описание численных методов. Вначале рассмотрим явный разностный метод. Для этого покроем область \bar{G} сеткой с равноотстоящими узлами по пространственным переменным x, y следующего вида:

$$\bar{\omega}_\tau h = \omega_\tau \times \bar{\omega}_n, \text{ где } \omega_\tau = \{t_n | t_n = n\tau, n = \overline{0, M}\};$$

$$\bar{\omega}_h = \{(x_j, y_k) | x_j = jh_x, y_k = kh_y, j = \overline{0, N_x}, k = \overline{0, N_y}\},$$

где τ – шаг по времени, h_x, h_y – пространственные шаги.

Аппроксимируем дифференциальную задачу (1),(2) явной разностной схемой вида:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{L_{j,k}^{n+1} - L_{j,k}^n}{\tau} + U \frac{L_{j,k}^n - L_{j-1,k}^n}{h_x} + V \frac{L_{j,k}^n - L_{j,k-1}^n}{h_y} = -K_1 L_{j,k}^n - K_3 L_{j,k}^n - \\ - \frac{\mu \max X_{j,k}^n L_{j,k}^n}{Y(K_L + L_{j,k}^n)} + J_B + D_f \left(\frac{L_{j+1,k}^n - 2L_{j,k}^n + L_{j-1,k}^n}{h_x^2} + \frac{L_{j,k+1}^n - 2L_{j,k}^n + L_{j,k-1}^n}{h_y^2} \right); \\ \frac{X_{j,k}^{n+1} - X_{j,k}^n}{\tau} + U \frac{X_{j,k}^n - X_{j-1,k}^n}{h_x} + V \frac{X_{j,k}^n - X_{j,k-1}^n}{h_y} = \frac{\mu \max X_{j,k}^n L_{j,k}^n}{K_L + L_{j,k}^n} + \\ + D_f \left(\frac{X_{j+1,k}^n - 2X_{j,k}^n + X_{j-1,k}^n}{h_x^2} + \frac{X_{j,k+1}^n - 2X_{j,k}^n + X_{j,k-1}^n}{h_y^2} \right); \\ \frac{D_{j,k}^{n+1} - D_{j,k}^n}{\tau} + U \frac{D_{j,k}^n - D_{j-1,k}^n}{h_x} + V \frac{D_{j,k}^n - D_{j,k-1}^n}{h_y} = K_1 L_{j,k}^n - K_2 D_{j,k}^n + J_1 + J_2 - \\ - \frac{\mu \max X_{j,k}^n L_{j,k}^n}{K_L + L_{j,k}^n} - J_3 + D_f \left(\frac{D_{j+1,k}^n - 2D_{j,k}^n + D_{j-1,k}^n}{h_x^2} + \frac{D_{j,k+1}^n - 2D_{j,k}^n + D_{j,k-1}^n}{h_y^2} \right) \end{array} \right.$$

с соответствующими начальными:

$$(4) \quad L_{j,k}^0 = 0; \quad X_{j,k}^0 = 1; \quad D_{j,k}^0 = 0; \quad j = \overline{0, N_x}; \quad k = \overline{0, N_y}$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned} L_{0,k}^n &= \varphi(k); \quad X_{0,k}^n = 1; \quad D_{0,k}^n = 0, \quad \text{если } t[n] < 2 \text{ сут.}; \\ L_{0,k}^n &= 0; \quad X_{0,k}^n = 1; \quad D_{0,k}^n = 0 \quad \text{при условии, что } t[n] \geq 2 \text{ сут.}; \\ L_{N_x,k}^n &= L_{N_x-1,k}^n; \quad X_{N_x,k}^n = X_{N_x-1,k}^n; \quad D_{N_x,k}^n = D_{N_x-1,k}^n; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L_{j,0}^n &= L_{j,1}^n; \quad X_{j,0}^n = X_{j,1}^n; \quad D_{j,0}^n = D_{j,1}^n; \\ L_{j,N_y}^n &= L_{j,N_y-1}^n; \quad X_{j,N_y}^n = X_{j,N_y-1}^n; \quad D_{j,N_y}^n = D_{j,N_y-1}^n; \\ j &= \overline{0, N_x}; \quad k = \overline{0, N_y}; \quad n = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Методом гармоник для явной разностной схемы (3) было получено условие устойчивости следующего вида:

$$\tau \leq \frac{1}{\frac{1}{h_x} \left(U + \frac{2D_f}{h_x} \right) + \frac{1}{h_y} \left(V + \frac{2D_f}{h_y} \right)}.$$

Показано, что порядок погрешности аппроксимации явной разностной схемы (3)-(5) имеет первый порядок по времени и по пространству, т.е. $O(\tau, h_x, h_y)$.

Из теоремы Лакса [5],[6] следует, что имеет место сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной.

В настоящее время широко используется метод конечных объемов (МКО) [7], основная идея которого состоит в разбиении расчетной области на некоторое количество непересекающихся объемов так, чтобы любая узловая точка содержалась в соответствующем объеме. При выводе разностной схемы решения задачи самоочищения использовались идеи, изложенные в [7].

Введем обозначения: $\bar{W} = (L, X, D)^T$; $\bar{S} = (S_1, S_2, S_3)^T$, где

$$S_1 = -K_1 L_{j,k}^n - K_3 L_{j,k}^n - \frac{\mu_{\max} X_{j,k}^n L_{j,k}^n}{Y(K_L + L_{j,k}^n)} + J_B; \quad S_2 = \frac{\mu_{\max} X_{j,k}^n L_{j,k}^n}{K_L + L_{j,k}^n};$$

$$S_3 = K_1 L_{j,k}^n - K_2 D_{j,k}^n - \frac{\mu_{\max} X_{j,k}^n L_{j,k}^n}{K_L + L_{j,k}^n} + J_1 + J_2 - J_3.$$

В результате разностная схема, аппроксимирующая модификацию вышеуказанных моделей, в МКО запишется в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\bar{W}_{j,k}^{n+1} - \bar{W}_{j,k}^n}{\tau} + U \frac{\bar{W}_{j+1,k}^n - \bar{W}_{j-1,k}^n}{2h_x} + V \frac{\bar{W}_{j,k+1}^n - \bar{W}_{j,k-1}^n}{2h_y} = \\ & \left(\bar{S}_{j,k}^n + D \left(\frac{\bar{W}_{j+1,k}^n - 2\bar{W}_{j,k}^n + \bar{W}_{j-1,k}^n}{h_x^2} \right) + D \left(\frac{\bar{W}_{j,k+1}^n - 2\bar{W}_{j,k}^n + \bar{W}_{j,k-1}^n}{h_y^2} \right) \right); \end{aligned} \right.$$

(6)

$$n = \overline{0, M-1}; \quad j = \overline{0, N_x-1}; \quad k = \overline{0, N_y-1};$$

$$L_{j,k}^0 = 0; X_{j,k}^0 = 1; D_{j,k}^0 = 0; \quad j = \overline{-1, N_x}; \quad k = \overline{-1, N_y};$$

(7)

$$L_{-1,k}^n = L_{0,k}^n = \varphi(k); \quad X_{-1,k}^n = X_{0,k}^n = 1; \quad D_{-1,k}^n = D_{0,k}^n = 0;$$

$$k = \overline{-1, N_y} \text{ при } 0 < t[n] < 2;$$

$$L_{-1,k}^n = L_{0,k}^n = 0; \quad X_{-1,k}^n = X_{0,k}^n = 1; \quad D_{-1,k}^n = D_{0,k}^n = 0;$$

$$k = \overline{-1, N_y} \text{ при } 2 \leq t[n] \leq T;$$

(8)

$$L_{N_x,k}^n = L_{N_x-1,k}^n; X_{N_x,k}^n = X_{N_x-1,k}^n; D_{N_x,k}^n = D_{N_x-1,k}^n;$$

$$k = \overline{-1, N_y}; \quad 0 < t[n] \leq T;$$

$$L_{j,-1}^n = L_{j,0}^n; X_{j,-1}^n = X_{j,0}^n; D_{j,-1}^n = D_{j,0}^n; j = \overline{-1, N_x}; \quad 0 < t[n] \leq T;$$

$$L_{j,N_y}^n = L_{j,N_y-1}^n; X_{j,N_y}^n = X_{j,N_y-1}^n; D_{j,N_y}^n = D_{j,N_y-1}^n; j = \overline{-1, N_x}; \quad 0$$

$$< t[n] \leq T.$$

Обсуждение результатов численных расчетов.

Исследуется участок реки Томи длиной 20 км и шириной 0.8 км. Численные расчеты проводились до момента времени T . Для решения разностной задачи и построения графиков написаны программы на языках Pascal и Matlab. На рассматриваемый участок реки, изображенный на рисунке 1, поступает загрязнение (субстрат) L (мг/л). Под загрязнением понимается легко окисляемые отходы, например, органического

происхождения. Процесс самоочищения протекает путем потребления субстрата микроорганизмами и за счет окисления загрязнения кислородом. Также учитываются процессы аэрации, инициируемые фотосинтезом, и связанные с поступлением органических веществ из донных отложений.

Результаты численных расчетов представлены на рис. 2-5.

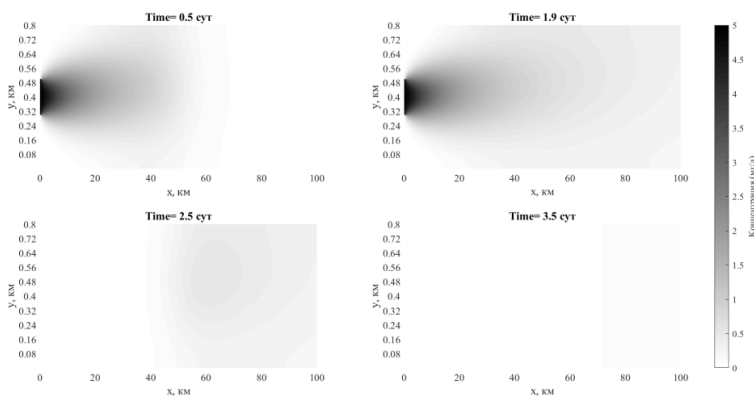


Рис. 2. Распределение концентрации субстрата L, мг/л

Графики распределения концентрации органического вещества L в моменты времени $t=0.5, 1.9, 2.5, 3.5$ сут представлены на рис.2. Из рисунка видно, что к моменту времени $t=0.5$ сут концентрация субстрата меняется от 5 до 4.7 мг/л на расстоянии 2.5 км. Распространение L происходит по форме, напоминающей параболу. На промежутке от 2.5 до 8 км по оси x концентрация загрязнения меняется от 4.7 до 5 мг/л, с 8-9 км величина L составляет 2.7-3.2 мг/л, на участке 9-15 км: 2.4-2.7 мг/л, 15-21 км: 1.4-2.3 мг/л, 21-40 км соответственно 0.8-1.4 мг/л, а для участка 40-70 км имеет место концентрация 0.4-

0.8 мг/л. На остальном участке реки $L=0$ мг/л. К моменту времени $t=1.9$ сут субстрат под действием течения реки постепенно распространяется до правой границы расчетной области на расстояние 100 км. После прекращения подачи загрязнений на 2-е сутки концентрация начинает стремительно уменьшаться, что показано на рис. 2 в моменты времени $t=2.5$, 3.5 сут.

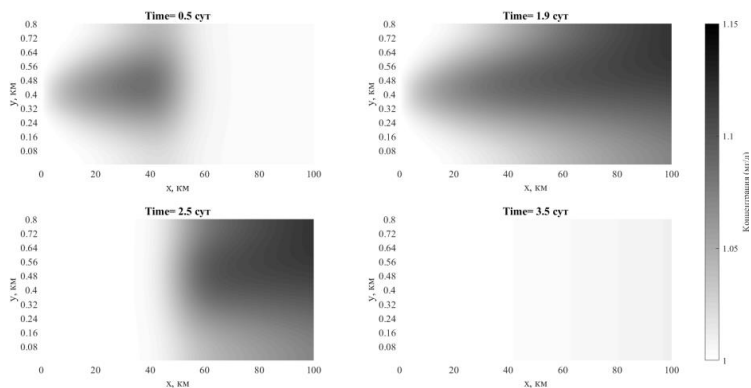


Рис. 3. Распределение биомассы микроорганизмов X

На временном интервале от 0 до 0.5 сут. концентрация микроорганизмов возрастает незначительно (от 1 до 1.1 мг/л). Это говорит о том, что влияние микроорганизмов на процесс самоочищения носит незначительный характер. Рост концентрации микроорганизмов наблюдается в направлении, совпадающем с направлением загрязнения, и захватывает участок реки длиной 62.5 км. В момент времени $t=1.9$ сут максимальная концентрация микроорганизмов достигается на правой границе расчетной области за счет потребления субстрата и течения реки, а с уменьшением L после 2 суток

концентрация микроорганизмов постепенно устанавливается на первоначальном значении 1 мл/л (моменты времени $t=2.5, 3.5$ сут, рис. 3).

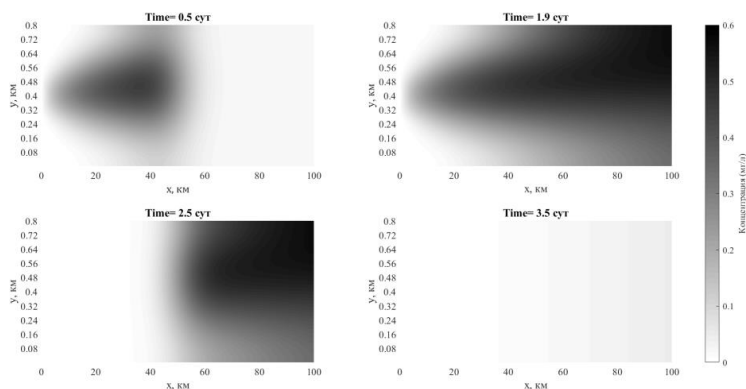


Рис. 4. Распределение дефицита кислорода D

Анализ результатов показывает, что основной вклад в процесс самоочищения загрязненного участка реки вносят окислительные процессы, связанные с реакциями органических соединений с кислородом. При этом дефицит кислорода возрастает за счет указанных реакций от 0 до 0.52 мг/л на участке длиной 65 км. Увеличение дефицита кислорода происходит в направлении, совпадающим с направлением распространения субстрата. При дальнейшем распространении субстрата L, дефицит кислорода возрастает в направлении оси x до 0.6 мг/л (момент времени $t=1.9$ сут, рис.4.). После 2 суток загрязняющий поток уменьшается, что приводит к сокращению расхода кислорода на окисление субстрата ($t=2.5, 3.5$ сут, на рис. 4).

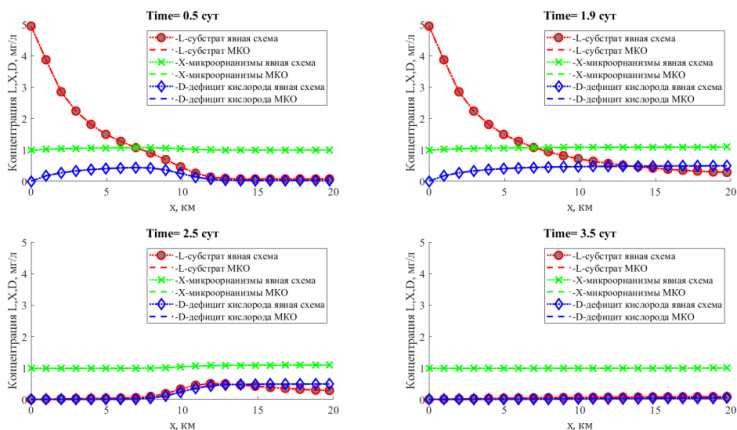


Рис. 5. Сравнение результатов численных расчетов

На рисунке 5 дается сравнение результатов численных расчетов по явной разностной схеме и по методу конечных объемов. На графиках изображен срез в узлах $(x_j, 50)$, $j = \overline{0, N_x}$. Из графика видно, что субстрат L распространяется по всей длине реки и его концентрация выше у левой границы. Концентрация микроорганизмов постепенно увеличивается слева на право. Дефицит кислорода также в направлении распространения субстрата по оси x . Из приведенного анализа видно, что результаты, полученные по указанным методам, совпадают между собой.

Заключение. Получены результаты численных расчетов по модификации моделей Моно, Стритера-Фелпса, Доббинса и Кемпа с помощью явного разностного метода и метода конечных объемов в двумерном приближении.

Исследованы вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных методов. Полученные условия устойчивости использовались при проведении расчетов на компьютере.

Результаты, представленные в виде графиков, проанализированы и сделаны соответствующие выводы о возможности самоочищения загрязненного участка реки.

Список литературы

- [1] Хублярян М.Г. Водные потоки: модели течений и качества суши. М.: Наука. - 1991.
- [2] Абеяшев Д.Г. Математическое моделирование процессов самоочищения реки с использованием модификации моделей Герберта и Стритера-Фелпса // Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / Под ред. проф. А.В. Старченко. – Томск: Изд-во Том. ун-та. - 2014.
- [3] Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука. - 1981.
- [4] Алехин В. Е. Анализ и совершенствование математических моделей для прогноза экологической надежности источников коммунального водоснабжения: диссертация кандидата технических наук: 05.17.08, 05.02.13.- Москва. - 2006.
- [5] Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. Томск: Издательский дом ТГУ. - 2014.

[6] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука. - 1971.

[7] Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат. - 1984. – С.24.

О методах расщепления при решении задач теплопроводности

Драморецкий А. С., Гольдин В. Д.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: anton970501@gmail.com

Рассмотрим нагрев тела имеющего прямоугольную форму под действием внешнего теплового воздействия.

В двумерном случае температура в таком теле описывается уравнением теплопроводности [1]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + AT + f \quad (1)$$

где

t -время,

x, y -координаты,

$T(t, x, y)$ -температура,

ρ – плотность,

c – удельная теплоемкость,

λ – коэффициент теплопроводности,

A, f – функции зависящие от x и y , где $A < 0$.

Требуется решить уравнение (1) в области:

$$\left\{ x \in [0; L_x], y \in [0; L_y], t \in [0; t_{\max}] \right\}.$$

Начальные условия содержат распределение температуры в теле в начальный момент времени:

$$t = 0: T = \varphi(x, y).$$

Граничные условия можно записать в общем виде:

$$\lambda\beta \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \alpha(T_e - T) + q \quad (2)$$

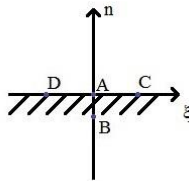
Следующим шагом является замена производных уравнения (1) конечно разностным соотношением сеточной функции.

Внутри расчётной области уравнение (1) заменяется с помощью стандартной неявной схемы, имеющей первый порядок аппроксимации по времени и второй – по пространственным переменным (теплофизические характеристики считаются постоянными):

$$\frac{T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}}{\tau} = a \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_y^2} \right) + B(AT_{i,j}^k + f_{i,j}^k) \quad (3)$$

Система уравнений (3) представляет собой аппроксимацию уравнения (1) по неявной разностной схеме.

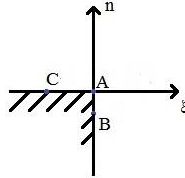
Для аппроксимации граничных условий в точках, не совпадающих с угловыми, введем локальную систему координат.



Граничные условия в данном случае запишутся в виде:

$$\frac{T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}}{\tau} = \frac{2a}{\lambda\beta_n \Delta n} (\alpha_n [T_e - T(A)] + q_n) - 2a \frac{T(A) - T(B)}{(\Delta n)^2} + a \frac{T(C) - 2T(A) + T(D)}{(\Delta \xi)^2} + B(AT(A) + f) \quad (4)$$

Для аппроксимации граничных условий в точках, совпадающих с угловыми, рассмотрим ту же самую систему координат.



$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}}{\tau} = & \frac{2a}{(\Delta n)^2} [T(B) - T(A)] + \frac{2a}{\lambda \beta_n \Delta n} \{ \alpha_n [T_e - T(A)] + q_n \} + \\ & + \frac{2a}{(\Delta \xi)^2} [T(C) - T(A)] + \frac{2a}{\lambda \beta_\xi \Delta \xi} \{ \alpha_\xi [T_e - T(A)] + q_\xi \} + B(AT(A) + f) \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (4), (5) аппроксимирует граничные условия с первым порядком по времени и вторым – по пространству.

Метод расщепления.

Для решения поставленной задачи требуется решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}}{\tau} = L_x T_{i,j}^k + L_y T_{i,j}^k + f_{i,j}^k, \quad (6)$$

Для решения системы уравнений (6) часто используют разные методы расщепления [3]. В этих методах процесс решения на одном шаге по времени разбивается на два или более этапа. Результат решения на последнем этапе считается решением на следующем шаге по времени. При этом в работах Н. Н. Яненко показано, что решение полученное по методу расщепления стремится к решению уравнения (6) при $\tau \rightarrow 0$.

Рассмотрим некоторые варианты методов расщепления:

1. Локальная одномерная схема (ЛОС). В этом методе уравнение (6) заменяется на схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau} = L_y T^{k+1/2} + f_y \\ \frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\tau} = L_x T^{k+1} + f_x \end{array} \right. ,$$

где $T^{k+1/2}$ - решение полученное на первом этапе расщепления.

2. Метод стабилизирующей поправки (Метод Дугласа-Рекфорда) [4]. Решение получается в результате последующей реализации шагов

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau} = L_y T^{k+1/2} + L_x T^k + f_y \\ \frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\tau} = L_x T^{k+1} + L_x T^k + f_x \end{array} \right.$$

3. Метод стабилизирующей поправки с итерациями [5]. В этом методе для получения решения на следующем шаге по времени организуется итерационный процесс. Значение на каждой итерации обозначим T^v . При $v = 0$ считается, что $T^v = T^k$. Один шаг итерации состоит из следующих этапов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T^{v+1/2} - T^k}{\tau} = L_y T^{v+1/2} + L_x T^v + F \\ \frac{T^{v+1} - T^{v+1/2}}{\tau} = L_x T^{v+1} + L_x T^v \end{array} \right.$$

При $\nu \rightarrow \infty$ решение $T^{\nu+1} \rightarrow T^{k+1}$.

В результате такой схемы получим решение, удовлетворяющие полному (не расщепленному) уравнению (6), что позволяет использовать значение τ , большие, чем в предыдущих двух случаях. В математическом смысле рассмотренные варианты метода расщепления эквивалентны. Однако их практическое применение имеет особенности.

Тестовый расчёт. В качестве тестового примера рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

с начальными условиями: $t=0: T=0$;

граничные условия запишутся в следующем виде:

$$x = 0: \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = 1: \frac{\partial T}{\partial x} = 1 - T;$$

$$y = 0: \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = 1: \frac{\partial T}{\partial y} = 1 - T;$$

Эта задача имеет аналитическое решение:

$$T(x, y, t) = 1 - \theta(t, x) * \theta(t, y), \quad \text{где}$$

$$\theta(\tau, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \xi) \exp(-\mu_n^2 \tau)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\mu_n^2 + 1}}{\mu_n(\mu_n^2 + 2)},$$

Здесь μ_n – положительные собственные числа задачи, определяемые из уравнения:

$$\operatorname{ctg}(\mu_n) = \mu_n$$

Численное решение данной задачи получим по методу локальной одномерной схемы. Данные сравнения численного и аналитического решения на сетках разного размера приведены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение численного и аналитического решения.

t=0,1		t=0,5		t=1		t=2	
Сетка	Δ	Сетка	Δ	Сетка	Δ	Сетка	Δ
4x4	0,21	4x4	$4,6 \cdot 10^{-3}$	4x4	$9,4 \cdot 10^{-4}$	4x4	$1,3 \cdot 10^{-4}$
8x8	0,07	8x8	$1,3 \cdot 10^{-3}$	8x8	$3,1 \cdot 10^{-4}$	8x8	$2,8 \cdot 10^{-5}$
16x16	0,03	16x16	$5,9 \cdot 10^{-4}$	16x16	$2 \cdot 10^{-4}$	16x16	$4,2 \cdot 10^{-5}$
32x32	0,02	32x32	$2,8 \cdot 10^{-4}$	32x32	$1,1 \cdot 10^{-4}$	32x32	$2,7 \cdot 10^{-5}$
50x50	0,019	50x50	$2,8 \cdot 10^{-4}$	50x50	$1,1 \cdot 10^{-4}$	50x50	$3,8 \cdot 10^{-5}$
64x64	0,018	64x64	$4,3 \cdot 10^{-4}$	64x64	$1,1 \cdot 10^{-4}$	64x64	$2,8 \cdot 10^{-5}$

В таблице 1 Δ - максимальная относительная погрешность вычисленной температуры. Вычисления, проведенные с помощью методов Дугласа-Рекфорда дали близкие результаты.

Задача 2. Очень часто при решении стационарных задач используют метод установления. Метод установления заключается в том, что решение стационарных задач можно рассматривать как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого часто оказывается проще.

Рассмотрим следующую стационарную задачу, которая встречается при рассмотрении переноса излучения.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3k^2(u - B) = 0$$

с такими граничными условиями:

$$x = 0: u - \frac{2}{3k} \frac{\partial u}{\partial x} = Y_0; \quad x = L: u + \frac{2}{3k} \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$y = 0: \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad y = 1: u + \frac{2}{3k} \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

Перейдем к нестационарной задаче:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3k^2(u - B) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

с начальным условием: при $t=0$, $u=0$.

Задача решалась при:

$$B = 2 \cos(\mu_0 y) e^{-x}, \quad Y_0 = \cos(\mu_0 y), \quad L = 5$$

μ_0 - первый положительный корень уравнения:

$$\mu_0 t g(\mu_0) = \frac{3k}{2}$$

При $k=1$, $\mu_0 = 0.9882407$

Аналитическое решение стационарного уравнения запишется в виде:

$$u(x, y) = 2 \frac{\mu_0^2 + A^2}{\mu_0^2 + A^2 + A} U_0(x) \cos(\mu_0 y), \quad U_0(x) = U_0^{(0)}(x) + U_0^{(1)}(x)$$

$$U_0^{(0)}(x) = \frac{1}{1 + \bar{\alpha}(1 - 2K_0 e^{-\beta})} \{ C_1 e^{-p_0 x} + C_1 e^{-p_0(L-x)} \}$$

$$U_0^{(1)}(x) = \frac{3k^2 A_0}{\mu_0^2 + 3k^2 - 1} e^{-x},$$

где

$$C_1 = D_0(1 - K_0 e^{-\beta}) + \frac{\bar{\alpha} - 1}{2} \tilde{E} e^{-\beta}, \quad C_2 = D_0 K_0 + \frac{\bar{\alpha} - 1}{2} \tilde{E} e^{-\beta}$$

$$A_0 = \frac{\mu_0^2 + A^2 + A}{\mu_0^2 + A^2}, \quad \bar{Y}_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0^2 + A^2 + A}{\mu_0^2 + A^2},$$

$$D_0 = \bar{Y}_0 - \frac{kA_0(3k+2)}{p_0^2 - 1}, \quad \tilde{E} = \frac{2E_0}{1 + \bar{\alpha}th(\beta)} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2\beta}},$$

$$E_0 = \frac{kA_0 e^{-L}}{p_0^2 - 1} (-3k + 2), \quad K_0 = \frac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + th\beta} \cdot \frac{e^{-\beta}}{1 + e^{-2\beta}},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{2p_0}{3k}, \quad \beta = p_0 L, \quad p_0 = \sqrt{\mu_0^2 + 3k^2}, \quad A = \frac{3k}{2}$$

Таблица 2. Численное решение стационарной задачи, полученное методом ЛОС

τ	0.0002	0.01	0.1	1
X=0	1.005	1.001	0.974	0.893
Y=0	(0.2%)	(0.2%)	(2.9%)	(11%)
X=0	0.553	0.551	0.535	0.491
Y=1	(0.2%)	(0.2%)	(2.9%)	(11%)
X=2.5	0.159	0.160	0.171	0.244
Y=0	(0.02%)	(0.8%)	(7.8%)	(53.8%)
X=2.5	0.087	0.088	0.094	0.134
Y=1	(0.01%)	(0.8%)	(7.8%)	(53.8%)
X=5	0.011	0.117	0.013	0.027
Y=0	(0.1%)	(1.2%)	(11.5%)	(133%)
X=5	0.00638	0.00644	0.007	0.015

Y=1	(0.1%)	(1.2%)	(11.5%)	(133%)
-----	--------	--------	---------	--------

В таблице 2 представлено численное решение стационарной задачи, полученное методом ЛОС в шести точках при расчете с разными шагами по времени. В скобках указана относительная погрешность от аналитического решения. Как видно, численное стационарное решение зависит от шага по времени.

Таблица 3. численное решение стационарной задачи, полученное методом Дугласа-Рекфорда

τ	0.0002	1
X=0	1.005	1.005
Y=0	(0.2%)	(0.2%)
X=0	0.553	0.553
Y=1	(0.2%)	(0.2%)
X=2.5	0.159	0.159
Y=0	(0%)	(0%)
X=2.5	0.087	0.087
Y=1	(0%)	(0%)
X=5	0.012	0.012
Y=0	(0.1%)	(0.1%)
X=5	0.00638	0.00638
Y=1	(0.1%)	(0.1%)

В таблице 3 представлены аналогичные результаты, полученные методом Дугласа-Рекфорда. В этом случае численное стационарное решение не зависит от шага по времени и близко к аналитическому.

Таблица 4. Сравнение аналитического решения с численными при расчётах с разными шагами по времени

τ	Аналитическое решение	Дуглас - Рекфорд	ЛОС
0.0002	0,006381	0.00638 (0.1%)	0.00638 (0.1%)
0.01	0,006381	0.00638 (0.1%)	0.00644 (1.2%)
0.1	0,006381	0.00638 (0.1%)	0.007 (11.5%)
1	0,006381	0.00638 (0.1%)	0.015 (133%)

В таблице 4 представлено сравнение аналитического решения с численными при расчётах с разными шагами по времени.

Выводы. Таким образом, для случая, когда стационарное решение не является однородным, метод Дугласа – Рекфорда является более предпочтительным, чем метод ЛОС. Метод Дугласа – Рекфорда с итерациями не показал преимуществ по сравнению со своим без итерационным вариантом.

Список литературы

[1] Лыков А. В. Теория теплопроводности/ А. В. Лыков. – М. Высшая школа. - 1967. – С.600.

- [2] Меркулова Н. И. Методы приближенных вычислений/ Н. И. Меркулова, М. Д. Михайлов; под ред. А. В. Старченко. – Томск: Изд. дом ТГУ. - 2014. – С.763.
- [3] Марчук Г.И. Методы расщепления/ Г. И. Марчук. – М. Наука, 1988. – С.264.
- [4] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем/М. :Наука. - 1971. – С.553.
- [5] Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1982. - Т. 22, №2. – С.339— 347.

Совмещение изображений на основании Shearlet-декомпозиции

Потоцкая А.А., Старченко А.В., Захарова А.А.

Томский государственный университет, Томск

Институт прикладных наук Руана, Руан

e-mail: bubuzyonok@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача совмещения двух изображений. Целью совмещения изображений является нахождение преобразования между двумя изображениями одной сцены или одного объекта, снятых в разное время, с разных точек зрения или с разных датчиков. Данная задача была исследована с помощью различных методов, которые часто зависят от конкретного применения. В данной работе рассмотрен алгоритм совмещения изображений на основании Shearlet-декомпозиции. Отображение между изображениями ищется на основании отображения между ключевыми признаками изображений, которые выделяются с помощью Shearlet-декомпозиции.

Ключевые слова: Совмещение изображений, теория фреймов, Shearlet-декомпозиция.

Совмещение изображений - это процесс преобразования различных наборов данных в одну систему координат. Данные могут представлять собой несколько фотографий, данные с разных датчиков, глубин, точек обзора или полученные в разные моменты времени, Совмещение необходимо для того,

чтобы иметь возможность сравнивать или интегрировать данные, полученные в процессе разных измерений. Алгоритмы совмещения изображений обычно делят на прямые (на основании пикселей) и на алгоритмы, основанные на деталях изображения. [1]

Сформулируем математическую постановку задачи совмещения изображений. Пусть I_1 и I_2 – изображения в пространстве $L^2 = \{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ и нормой $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$. Необходимо найти оптимальное преобразование между изображениями I_1 и I_2 . Таким образом, сформулируем задачу совмещения изображений [1]:

$$(P'): \text{Найти } \eta'_0 = \operatorname{argmin}_{\eta \in T} \|U(\eta)I_1 - I_2\|_2,$$

где T – группа преобразований между двумя изображениями, $\eta \in T$ – преобразование, представленное в виде вектора из пространства \mathbb{R}^P , содержащего параметры преобразования, $U(\eta) \in L^2$ – альтернативное унитарное представление преобразования. То есть, для любого $\eta \in T$, $U(\eta)$ – это функция, которая отображает изображение f в его преобразованное изображение $U(\eta)f \in L^2$. Более того, так как $U(\eta)$ – унитарный оператор, то $\|U(\eta)f\|_2 = \|f\|_2$. Обозначим через $d(I_1, I_2) = \|U(\eta'_0)I_1 - I_2\|_2$ инвариантное расстояние относительно преобразования η'_0 между изображениями I_1 и I_2 . К сожалению, поиск преобразования η'_0 и соответствующего инвариантного расстояния является сложной задачей, так как целевая функция обычно не выпукла и имеет множество локальных минимумов.

Чтобы обойти эту проблему, предположим, что изображения хорошо аппроксимированы их разреженным разложением в ряд геометрических функций. Пусть D – параметрический словарь геометрических особенностей, построенный преобразованием порождающей функции $\varphi \in L^2$ следующим образом:

$$D = \{\varphi_\gamma : \gamma \in T_d\} \subset L^2, \quad (1)$$

где $T_d \subset T$ – конечная дискретизация группы преобразований T и $\varphi_\gamma = U(\gamma)\varphi$ обозначает преобразование порождающей функции φ с помощью γ . Обозначим через p и q разреженные аппроксимации функций (изображений) I_1 и I_2 соответственно в словаре D :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^K c_i \varphi_{\gamma_i}, \\ q &= \sum_{i=1}^K d_i \varphi_{\delta_i}. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как словарь D содержит особенности, которые показывают потенциальные части изображения, то предположим, что коэффициенты c_i и d_i – все неотрицательные, то есть различные особенности не погашают друг друга.

Считаем, что любой элемент φ_γ из D (1) является геометрической особенностью изображения. Предположим сначала, что функция φ неотрицательна. В дополнение, предположим для простоты, что $\gamma \mapsto \varphi_\gamma$ представляет собой взаимно-однозначное соответствие. Наконец, предположим, не теряя общности, что порождающая функция φ нормирована.

Теперь мы можем определить задачу совмещения, как задачу нахождения оптимального отображения между разреженными образцами. Строгая постановка [1]:

$$(P): \text{Найти } \eta_0 = \operatorname{argmin}_{\eta \in T} \|U(\eta)p - q\|_2.$$

Наименьшее расстояние $d(p, q) = \|U(\eta_0)p - q\|_2$ является преобразованным инвариантным расстоянием между разреженными аппроксимациями изображений p и q . В сравнении с основной постановкой, изображения I_1 и I_2 заменены их соответствующими разреженными представлениями p и q . Это дает некоторые потенциальные преимущества в приложениях. Необходимо ответить, что если исходные изображения не удачно аппроксимированы соответствующими разреженными представлениями, то решение задачи (P) может значительно отличаться от решения основной задачи (P') .

Рассмотрим далее алгоритм решения задачи совмещения, предложенный в [1] для изображений, представленных их разреженными представлениями. Ключевая идея данного алгоритма основывается на свойстве ковариации словаря D (1): глобальное преобразование, примененное к изображению, вызывает эквивалентное преобразование соответствующих признаков. Благодаря этому свойству ковариации можно вывести глобальное преобразование между изображениями простым вычислением относительных преобразований между особенностями обоих изображений.

В частности, пусть $T_a^{p,q}$ - множество относительных преобразований между парами признаков, взятых соответственно в p и q : $T_a^{p,q} = \{\delta_i \circ \gamma_j^{-1} : 1 \leq i, j \leq K\}$. Таким образом, можно оценить преобразование между изображениями, решив следующую более слабую задачу:

$$(\hat{P}): \text{Найти } \hat{\eta} = \operatorname{argmin}_{\eta \in T_a^{p,q}} \|U(\eta)p - q\|_2.$$

Минимум целевой функции $d_a(p, q) = \|U(\hat{\eta})p - q\|_2$ определяется как приближенное расстояние, инвариантное к преобразованию между I_1 и I_2 .

Хотя задачи (P) и (\hat{P}) имеют некоторые общие черты, они различаются в важном аспекте, а именно в пространстве поиска. Оно сокращается от T до конечного множества $T_a^{p,q}$. Это заставляет оцениваемое преобразование быть равным преобразованию, которое точно отображает две особенности, взятые соответственно из p и q . Предположение, что T можно заменить на $T_a^{p,q}$, вытекает из наблюдения, что особенности ковариантны глобальному преобразованию, примененному к исходному изображению. Даже если это предположение не обязательно верно для всех признаков, когда между изображениями существует отображение (отличное от искомого глобального преобразования), ожидается, что существует, по крайней мере, один признак, преобразование которого согласуется с оптимальным преобразованием η_0 . Преимущество замены T на $T_a^{p,q}$, тем не менее, является непосредственным: неразрешимая проблема сводится к проблеме, пространство поиска которой имеет мощность не более K^2 . Поскольку K

обычно выбирается достаточно малым, задача (\hat{P}) может быть эффективно решена путем полного поиска по всем элементам $T_a^{p,q}$.

Вычислительная сложность рассмотренного алгоритма напрямую зависит от выбора константы K : большое значение K приводит к большой мощности пространства поиска $T_a^{p,q}$. Кроме того, от значения K также обычно зависит погрешность аппроксимации исходных изображений их разреженными разложениями p и q . Наконец, нужно отметить, что для простоты необходимо предположить, что оба изображения I_1 и I_2 аппроксимируются одинаковым количеством признаков. Тем не менее, легко видеть, что можно обобщить это на случай, когда количество признаков различно. В этом случае имеем $|T_a^{p,q}| = K_1 K_2$ вместо K^2 , где K_1 и K_2 - количество признаков в I_1 и I_2 соответственно.

Рассмотрим подробнее переход от исходной задачи в (\hat{P}) с точки зрения эффективности совмещения. Для начала определим метрику для измерения точности совмещения изображений. Так как мы хотим получить представление о производительности описанного алгоритма в отношении оптимального совмещения изображений, полученного путем решения (P') , очевидно определить метрику через разницу между расстоянием, инвариантным для преобразования, и его приближенной версией, то есть $E'(p, q, I_1, I_2) = |d_a(p, q) - d(I_1, I_2)|$. Однако, как говорилось ранее, предполагается, что изображения задаются их разреженными разложениями.

Поэтому используется альтернативная метрика, заданная $E(p, q) = d_a(p, q) - d(p, q)$, где используются приближения разреженного изображения p и q вместо оригинальных изображений. Отметим, что $E(p, q) \geq 0$, так как $T_a^{p,q} \subset T$.

Следующая теорема связывает две метрики $E(p, q)$ и $E'(p, q, I_1, I_2)$ с ошибками разреженной аппроксимации $\|I_1 - p\|_2$ и $\|I_2 - q\|_2$.

Теорема 1. $E'(p, q, I_1, I_2) \leq E(p, q) + \|I_1 - p\|_2 + \|I_2 - q\|_2$.

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [1].

Рассмотрим частный случай, когда $d(p, q) = 0$. Это означает, что существует преобразование $\eta_0 \in T$, для которого $q = U(\eta_0)p$, т. е. отображение между разреженными аппроксимациями изображений может быть найдено точно. В данном случае описанный алгоритм совмещения способен восстановить точное глобальное преобразование между p и q , если любое подмножество размера $2K$ в D линейно независимо. [1] Линейная независимость любого подмножества размера $2K$ в словаре D фактически гарантирует более сильный результат: это гарантирует, что у любого разреженного сигнала есть уникальное разложение в D [2]. Другими словами, это гарантирует, что когда два разреженных сигнала равны, все их признаки равны.

Предыдущий результат применим только к идеальному сценарию, поскольку на практике условие $d(p, q) = 0$ редко выполнимо. В общем же случае, между изображениями обычно присутствуют небольшие отличия (помимо преобразования из T), которые приводят к ненулевому расстоянию $d(p, q)$. Кроме того, даже когда исходные изображения точно связаны глобальным преобразованием (т.е. $d(I_1, I_2) = 0$), нет гарантии, что разреженные приближения могут быть идеально выровнены (т.е. $d(p, q) = 0$) из-за дискретизации словаря.

В общем случае, когда разреженные приближения p и q имеют различия, которые не могут учитываться в глобальном геометрическом преобразовании из T . То есть, предположим что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $d(p, q) < \varepsilon \sqrt{\|c\|_2^2 + \|d\|_2^2}$, где c и d обозначают соответствующие векторы коэффициентов для приближений p и q из (2). Следовательно, величина ε измеряет нормализованную разницу между p и q .

В работе рассматривается задача совмещения изображений путем поиска относительных преобразований между отличительными особенностями изображений, представленных в виде их разреженных аппроксимаций (2).

Методы, основанные на вейвлетах, были эффективно применены к проблеме совмещения многовременных изображений. Разлагая изображение в соответствии с дискретным вейвлет-алгоритмом, изображение уменьшается до наиболее важных характеристик, которые легче сопоставить. Хорошо известно, что вейвлеты достаточно хорошо фиксируют

некоторые особенности изображения, такие как текстуры. Однако известно, что вейвлеты являются изотропными, то есть они не эффективно представляют изображения, имеющие характерные особенности. В частности, изображения с четкими краевидными элементами, включая реки, дороги и горы, неоптимально представлены с помощью вейвлет-подобных алгоритмов.

Существует много анизотропных обобщений вейвлетов. В частности, shearlets [3], дают быстрое, оптимизированное и зависящее от направления разложение изображений, которое дает надежный алгоритм регистрации изображений.

Рассмотрим полученные результаты. В качестве тестового изображения рассмотрим стандартное изображение Barbara, представленное на рисунке 1. В качестве второго изображения для совмещения возьмем то же изображение, масштабированное с параметром scale и повернутое на угол α (Рис.2).



Рис. 1. Тестовое изображение Barbara



Рис. 2. Масштабированное и повернутое изображение ($scale=0.7$, $alpha=30$)

На рисунке 3 представлены результаты поиска особенностей изображений и соотношения между ними. Кружками обозначены особенности на оригинальном изображении, а крестиками – на измененном, линии указывают соответствие между особенностями.



Рис. 3. Соответствие обнаруженных особенностей

Для проверки эффективности использованного алгоритма, проведем обратное преобразование (восстановление) измененного изображения. Для критерия сравнения оригинального и восстановленного изображений будем использовать отношение пикового сигнала к шуму (PSNR). На рисунке 4а приведено оригинальное изображение, а на рисунке 4б – восстановленное. Значение PSNR, в данном случае, равно 26,5.



Рис. 4. Исходное (а) и восстановленное (б) изображения

Рассмотрим влияние масштабирующего параметра и угла поворота на эффективность метода. Для этого рассмотрим результаты численных экспериментов, приведенных в таблице 1. Здесь представлена зависимость «отличия» исходного и восстановленного изображений от масштабирующего параметра и угла поворота.

Таблица 1. Зависимость PSNR от масштабирующего параметра и угла поворота

Масштаб	Поворот	PSNR
scale = 1	alfa = 30	28.5201
scale = 1	alfa = 45	29.4196
scale = 1	alfa = 60	29.8522
scale = 1	alfa = 90	Inf
scale = 0.9	alfa = 45	25.9420
scale = 0.7	alfa = 45	24.0888
scale = 0.5	alfa = 45	24.3584
scale = 0.3	alfa = 45	17.9779

Исходя из представленных результатов, можно сделать вывод, что данный метод эффективно совмещает повернутые изображения. Однако даже небольшое масштабирование значительно ухудшает полученные результаты.

Список литературы

- [1] Fawzi A., Frossard P. Image registration with sparse approximations in parametric dictionaries // *SIAM Journal on Imaging Sciences*. – 2013. – Т. 6. – №. 4. – С.2370—2403.
- [2] Donoho D. L., Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2003. – Т. 100. – №. 5. – С.2197—2202.

[3] Потоцкая А. А. и др. Обработка изображений с помощью Shearlets//Сборник статей девятой сибирской конференции по параллельным и высокопроизводительным вычислениям. – 2017. - С.55—61

Применение метода дискретных элементов для моделирования конфигурации засыпок из микросфер

Фисенко В. Н.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,

Новосибирск

e-mail: vn_fisenko@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена моделированию конфигураций засыпок из микросфер с применением метода дискретных элементов, и также анализу геометрических параметров полученных конфигураций. Проведен анализ смоделированных засыпок, получены данные по объемной концентрации и удельной поверхности засыпок в зависимости от высоты насыпного слоя частиц.

Ключевые слова: полые микросферы, метод дискретных элементов, YADE.

Введение. Сыпучие среды повсеместно встречаются в природе и промышленности (горно-металлургической, строительной, пищевой, фармацевтической и т.д.), они представляют широкий спектр явлений, зависящий от условий нагружения. Все более возрастающий интерес к сыпучим средам обусловлен большим количеством задач, где они являются важной составляющей изучаемой системы. Примером здесь может служить технология мембранно-сорбционного

выделения гелия из природного газа, разработкой и изучением которой занимаются в ИТПМ СО РАН. Адсорбер, в котором происходит процесс, представляет собой емкость из нержавеющей стали в которую загружается сорбент – полые стеклянные микросферы. Процесс извлечения гелия из газовой смеси осуществляется по адсорбционно-циклической схеме за счет его проникновения во внутреннюю полость частиц через стенки, которые представляет собой мембраны. В таком подходе важно знать геометрические свойства засыпок, получаемых из микросфер или гранул, которые изготавливают на их основе.

Полые стеклянные микросферы представляют собой сыпучую среду. Они образуются при сжигании твердого топлива, путем дробления минеральной части углей на отдельные мелкие капли и последующего их раздува из-за увеличения объема газовых включений.

Микросферы используют не только для адсорбции гелия, но и для изготовления композитных материалов, благодаря их высокой адгезии к полимерным связующим. Таким образом, широкий спектр полезных свойств микросфер определяет большое разнообразие областей их применения.

Физическая постановка задачи. Основной задачей было получить засыпку полых стеклянных микросфер в области, имеющей форму параллелепипеда с заданными геометрическими параметрами.

В качестве изучаемых образцов использовались микросферы МС-В-1Л, на рис. 1 (получены из работы [1])

видно, что частицы обладают правильной сферической формой (рис. 1, *а*). Но некоторое количество сфер повреждены – имеют трещины и сколы (рис. 1, *б*).

На рис. 2 приведены распределения микросфер по размерам, полученные путем анализа фотографий, полученных на сканирующем электронном микроскопе (рис.2, *а*), а также в соответствии с данными лазерной дифракции (рис. 2, *б*). Для распределения МС-В-1Л узкой фракции (рис. 2, *а*) размеры сфер колеблются от 10 до 60 мкм, средний диаметр $\langle d \rangle = 35$ мкм; для микросфер из распределения МС-В-1Л широкой фракции (рис. 2, *б*) размеры колеблются от 9,8 до 184,5 мкм, средний диаметр $\langle d \rangle = 80,63$ мкм;

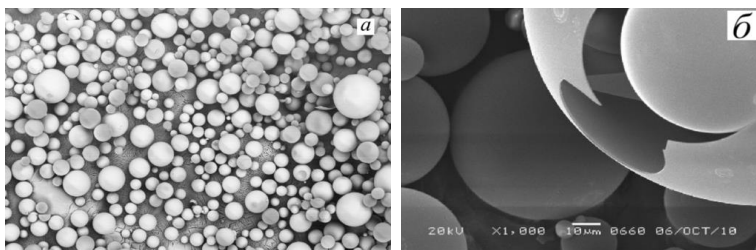


Рис. 1. Фотографии микросфер МС-В-1Л

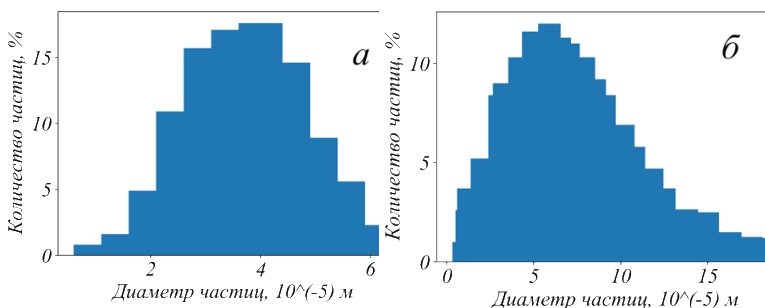


Рис. 2. Распределения микросфер по размерам: а) МС-В-1Л узкая фракция.; б) МС-В-1Л широкая фракция.

Математическая постановка задачи. Необходимо было рассчитать геометрические параметры засыпки шаров в заданной области. В качестве области моделирования задается емкость в форме параллелепипеда (рис. 3, а) размерами $10d_{\max} \times 10d_{\max} \times 200d_{\max}$, где d_{\max} максимальный диаметр частицы из выборки. Принятые физические свойства частиц перечислены в таблице 1.

В начальный момент времени по всему пространству внутри параллелепипеда N частиц распределяются в форме кубической упаковки, но на расстоянии между центрами любых двух частиц порядка d_{\max} (таким образом, чтобы удалось избежать пресечений сфер). Далее каждой частице необходимо задать поступательную и вращательную начальные скорости в интервале от 0,5 до 1,5 м/с, чтобы обеспечить реалистичность процесса взаимодействия сфер друг с другом.

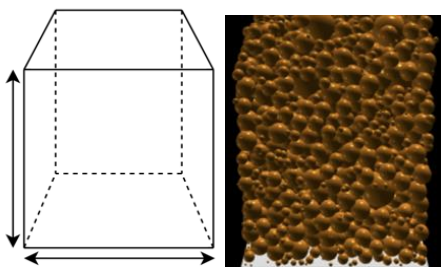


Рис. 3. Постановка задачи: а) геометрическая область размерами $10d_{\max} \times 10d_{\max} \times 200d_{\max}$; б) пример засыпки

Диаметр, м	$5 \cdot 10^{-6}$
Плотность, кг/м ³	$2,339 \cdot 10^3$
Модуль Юнга, Па	$62,3 \cdot 10^9$
Коэффициент Пуассона	0,196
Коэффициент трения	0,8
Константа демпфирования	0,077

Определение геометрических параметров засыпки.

Область моделирования представляла собой параллелепипед заданных размеров. Рассмотрим эту область и конфигурацию шаров, полученную в результате моделирования. Внутренний объем области можно разделить на две части: свободное пространство, объем которого можно обозначить как v_0 и объем, занятый шарами – v .

Весь объем области моделирования (рис 3, а) можно разделить по высоте на «слои» параллельные плоскости XY, имеющие заданную толщину (толщина слоя определялась минимальным диаметром шара из выборки). В каждый слой попадает сфера целиком или ее часть, в зависимости от этого можно посчитать объем, занятый сферами в каждом слое и определить объемную концентрацию v / v_0 . Аналогично для удельной площади поверхности, которая определяется выражением s / v_0 , где s – площадь внешней поверхности шаров.

Результаты. Здесь и далее для генерации засыпок использовались возможности YADE [2].

Засыпка из шаров одинакового размера. Для проверки правильности работы программы сначала была сгенерирована тестовая засыпка, состоящая из 3000 шаров диаметра $d = 9,06 \cdot 10^{-5}$ м, область моделирования представляла собой параллелепипед размерами $10d \times 10d \times 270d$ мм. Каждая частица получила начальную поступательную составляющую скорости в интервале от 0 до 0,005 м/с, заданную случайным образом; вращательная компонента скорости также задавалась случайным образом.

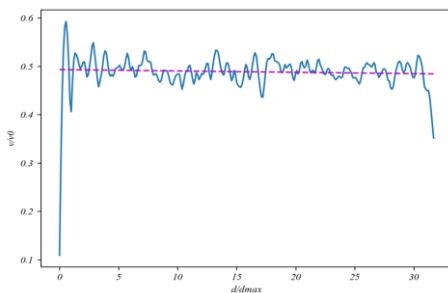


Рис. 4. Зависимость объемной концентрации микросфер от высоты (пунктиром проведена линия тренда)

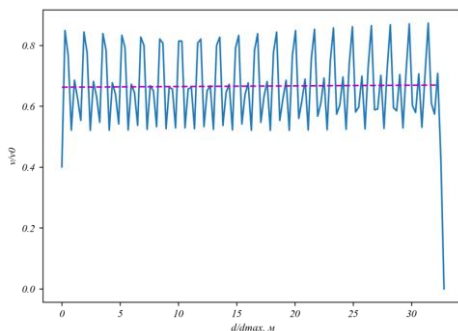


Рис. 5. Зависимость объемной концентрации от высоты для гексагональной упаковки (пунктиром проведена линия тренда)

На рис. 4 показан график зависимости объемной концентрации микросфер от высоты (пунктиром показана линия тренда). В качестве контрольной модели была построена плотная гексагональная упаковка и рассчитана объемная концентрация (рис. 5), для данной конфигурации. По рис. 4, 5 видно, что рассчитанная засыпка из сфер одинакового размера имеет в среднем почти на 15% меньшую объемную концентрацию, чем гексагональная упаковка. Вероятно, это связано с большими областями свободного пространства между сферами и стенками параллелепипеда.

Засыпки из шаров с заданным распределением по диаметрам.

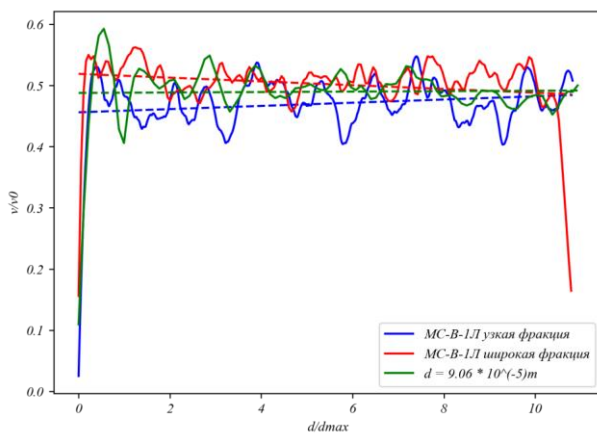


Рис. 6. Зависимость объемной концентрации от высоты для различных распределений по диаметрам

Для смоделированных засыпок были рассчитаны геометрические параметры. На рис. 6 показана зависимость

объемной концентрации (пунктиром изображены линии тренда) от высоты для двух различных распределений по диаметрам (рис. 2) и частиц одинакового размера ($d = 9,06 \cdot 10^{-5}$ м). На рис. 7 показана зависимость удельной площади от высоты для этих распределений.

Как видно из рис. 6, для используемых распределений по размерам разница в объемной концентрации полученной засыпки незначительна. Однако удельный объем для микросфер МС-В-1Л узкой фракции выше, чем для остальных распределений. Это можно объяснить меньшим размером микросфер в данном распределении.

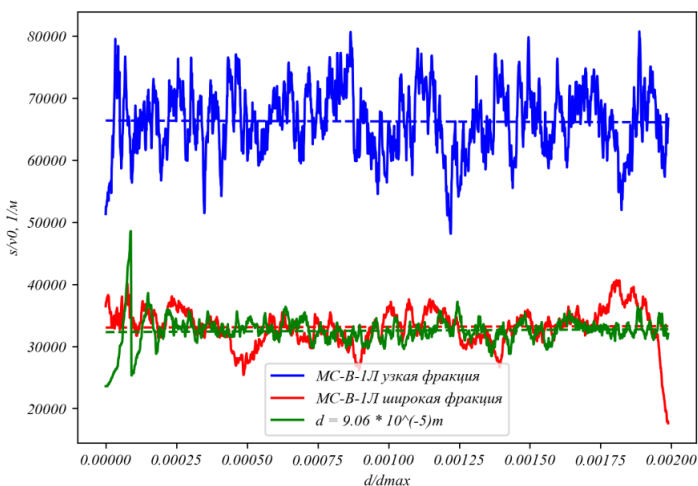


Рис. 7. Зависимость удельной площади поверхности от высоты для различных распределений по диаметрам

В технологии мембранно-сорбционного выделения гелия из природного газа как раз важна удельная поверхность микросфер, т.к. адсорбция происходит через их оболочку.

Таким образом можно сделать вывод, что применение микросфер МС-В-1Л узкой фракции более эффективно для адсорбции гелия, чем применение остальных изученных образцов.

Заключение. В данной работе смоделированы засыпки из микросфер МС-ВЛ-1Л узкой фракции и МС-В-1Л широкой фракции с заданными распределениями по размерам в области в форме параллелепипеда методом дискретных элементов, с использованием программного модуля YADE. Также проведен анализ смоделированных засыпок, получены данные по объемной концентрации и удельной поверхности засыпок в зависимости от высоты насыпного слоя частиц. Средняя концентрация для МС-ВЛ-1Л узкой фракции 0,46, для МС-В-1Л широкой фракции 0,51. Средняя удельная поверхность для МС-ВЛ-1Л узкой фракции 68000 м^{-1} , для МС-В-1Л широкой фракции 32000 м^{-1} .

Список литературы

- [1] В. Н. Зиновьев, И. В. Казанин, А. Ю. Пак, А. С. Верещагин, В. А. Лебига, В. М. Фомин. Проницаемость полых микросферических мембран по отношению к гелию // Инженерно-физический журнал. - 2016. - Т. 89. №1. – С.24—36.
- [2] V. Smilauer, et al., Yade Documentation 2nd ed, The Yade Project. – 2015. – P.630. <http://yade-dem.org/doc/>. doi:10.5281/zenodo.34073.

Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод с использованием некоторых модификаций модели Кенейла

Хуторная А.И., Михайлов М.Д.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: anas-kh@yandex.ru

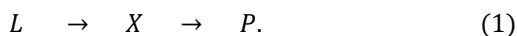
Аннотация. Рассматривается модель Кенейла и ее модификации с использованием биофильтра. Модели основаны на пищевой цепочке, состоящей из двух трофических уровней и субстрата.

Математически процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Для численной реализации используется неявный метод Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости. Численные расчеты представлены в виде графиков. Дается анализ полученных результатов.

Ключевые слова: биологическая очистка, субстрат, бактерии, микроорганизмы, простейшие, модель, аппроксимация, устойчивость, сходимость, неявная схема, биофильтр.

Очистка сточных вод играет важную роль в экологической сфере. Одним из важных ее этапов является биологическая очистка. Основой этого способа являются процессы жизнедеятельности микроорганизмов (активный ил), с помощью которых растворенные органические вещества потребляются микроорганизмами, причем часть их окисляется, а часть трансформируется в биомассу, в результате чего происходит очищение жидкости. Суть биологического этапа изложена в [1].

В [2] более подробно рассмотрена модель Кенейла, в которой процесс биологической очистки описывается следующей пищевой цепью:



субстрат бактерии простейшие

Для исследования устойчивости системы, описывающей данную модель (см. (1) в [2]), необходимо определить точки стационарного равновесия этой системы и линеаризовать ее. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$L = \dot{L} + \tilde{L}, X = \dot{X} + \tilde{X}, P = \dot{P} + \tilde{P},$$

где $\dot{L}, \dot{X}, \dot{P}$ - малые величины, $\tilde{L}, \tilde{X}, \tilde{P}$ - значения L, X, P , определяющие положение стационарного равновесия из условий:

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = \frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{d\tilde{P}}{dt} = 0.$$

Система (1) из [2] в линеаризованном виде имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{L}}{dt} = -\frac{\mu_{max}(\tilde{X}\tilde{L} + \tilde{L}\tilde{X})}{Y(K_L + \tilde{L})}, \\ \frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{\mu_{max}(\tilde{X}\tilde{L} + \tilde{L}\tilde{X})}{K_L + \tilde{L}} - \frac{f_{max}(\tilde{P}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{P})}{g(K_x + \tilde{X})}, \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} = \frac{f_{max}(\tilde{P}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{P})}{K_x + \tilde{X}}. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя полученные точки стационарного равновесия, $\tilde{L} = 0$, $\tilde{X} = 0$, $\tilde{P} = 0$ в (2), имеем:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{L}}{dt} = 0, \\ \frac{d\tilde{X}}{dt} = 0, \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $\lambda_{1,2,3} = 0$. Из этого следует устойчивость по Ляпунову [3].

Аппроксимируя систему (2) разностной схемой неявного метода Эйлера и подставляя точки стационарного равновесия, получим систему разностных уравнений. Корни характеристического уравнения матрицы перехода $\lambda_{1,2,3} = 1$. Поэтому неявный метод Эйлера абсолютно устойчив [4].

Погрешность, с которой разностная схема аппроксимирует модель Кенейла, исследована в [2]. Тогда, из теоремы Лакса [4] вытекает, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной.

В качестве дополнительного фактора очистки сточных вод можно подключить биофильтр. Для расчета изъятия органических загрязнений будет использоваться подход К.Н.

Королькова [5], в результате чего в уравнении, описывающим изменение скорости концентрации загрязнения L , появляется дополнительное слагаемое $-kL$, т.е.

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)} - kL \quad (4)$$

при условии, что масса органических веществ, адсорбированных активным илом, пропорциональна концентрации их в воде в момент времени t . Здесь k – константа скорости изъятия органических загрязнений.

Рассматривается высоконагружаемый биофильтр, параметр k выбирается на основании заданных характеристик в [5].

Модель Кенейла с учетом биофильтра записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)} - kL, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X}, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичным способом исследованы вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости соответствующего численного метода, аппроксимирующего (5).

Результаты численных расчетов модели Кенейла без применения биофильтра и с применением его представлены на рис. 1 в виде графиков с различными константами k .

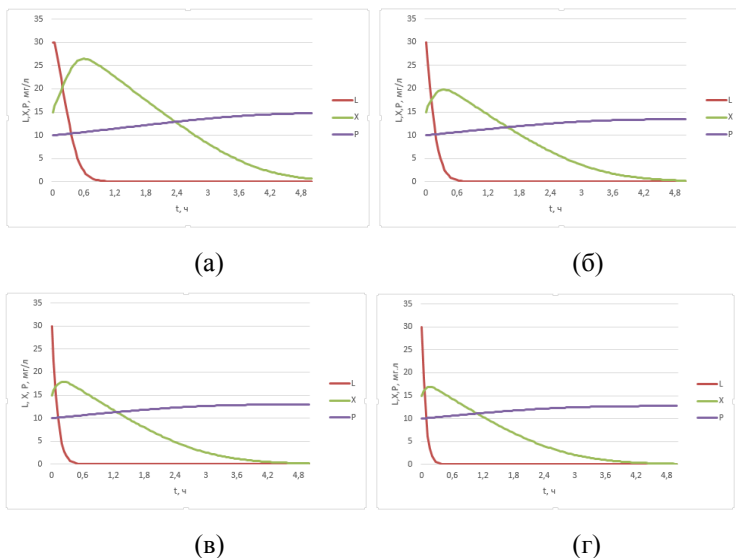


Рис. 1. Результаты численных расчетов модели Кенейла: (а) без использования биофильтра; (б, в, г) с использованием биофильтра; (б) $k = 3.96$; (в) $k = 8.5$; (г) $k = 14.8$

Из графика видно, что очистка с помощью модели Кенейла (рис. 1 (а)) происходит за первые 2 ч. В случае применения биофильтра процесс очистки идет быстрее, причем скорость очищения зависит от величины k . Например, на рис. 1 (б) время очистки 1.4 ч, на рис. 1 (в) – 1 ч, на рис. 1 (г) – 0.73 ч.

В статье Кердса [6] рассматривается непрерывная система, в которой имеет место постоянный приток воды с некоторой концентрацией загрязнения L_0 , а также отток жидкости, содержащей концентрации субстрата, бактерий и простейших. Считается, что скорость вливания сточных вод постоянна, так же, как и скорость вымывания. Объем реактора,

куда поступает загрязненная жидкость, постоянна и культура, заполняющая реактор и состоящая из субстрата, бактерий и простейших, хорошо размешивается. Кроме того, предполагается, что скорость разбавления в реакторе остается величиной постоянной и обозначается D .

С учетом вышеизложенных предположений, модель Кенейла можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)}, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - DX - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X} - DP, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0. \end{cases} \quad (6)$$

Результаты численного решения задачи (6), полученные с помощью неявного метода Эйлера, представлены на рис. 2.

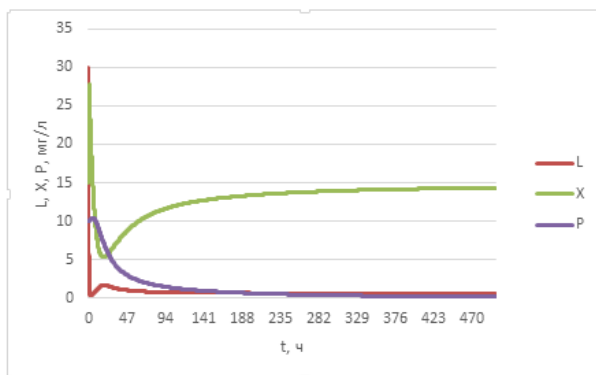


Рис. 2. Результаты численных расчетов задачи (6) без учета биофильтра

Процесс вливания и выливания некоторого объема жидкости с различными концентрациями L , X , P влияет на результат, полученный авторами ранее в [2]. На рис. 2 наблюдается падение концентрации простейших и субстрата до значений, близких к нулю. Концентрация бактерий возрастает приблизительно до 15 мг/л и устанавливается на одном уровне при $t \approx 470$ ч.

Проверка устойчивости численного метода применительно к (6) осуществляется с помощью численного эксперимента с шагами τ и $\tau/2$. Результаты расчетов представляются в виде двух графиков на рис.3. Анализ показывает, что результаты, полученные с шагами τ и $\tau/2$, совпадают. Исследование вопросов аппроксимации и сходимости проводится аналогично [2].

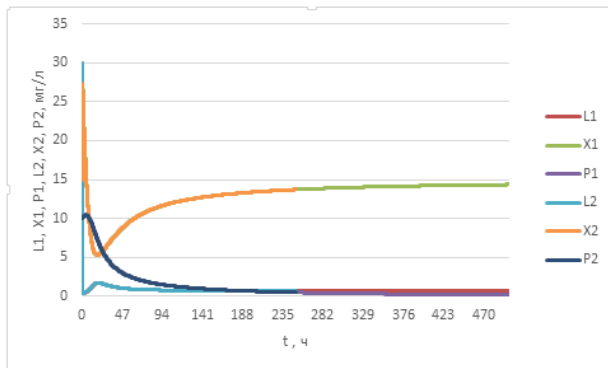
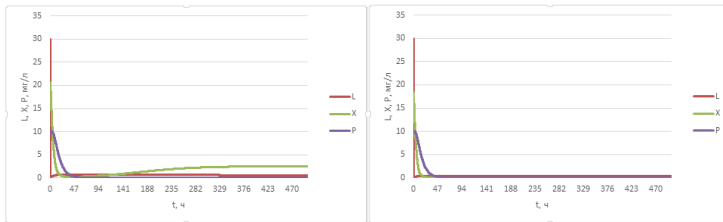


Рис. 3. Результаты численных расчетов задачи (6) с шагами τ и $\tau/2$

Рассмотрим применение биофильтра к задаче (6):

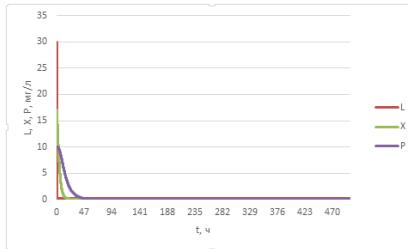
$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)} - kL, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - DX - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X} - DP, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0, \end{cases} \quad (7)$$

Численные расчеты модели (7) осуществляются с помощью неявного метода Эйлера и представлены на рис. 4.



(а)

(б)



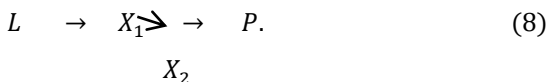
(в)

Рис. 4. Результаты численных расчетов (7) с биофильмом: (а) $k=3.96$; (б) $k=8.5$; (в) $k=14.8$

В случае, представленном на рис. 4, концентрация загрязнения падает также, как и на рис. 2, а уровень, на котором останавливается L, становится ниже (рис. 2, $L=0.628$ мг/л; рис. 4

(а), $L=0.614$ мг/л; рис. 4 (б), $L=0.348$ мг/л; рис. 4 (в), $L=0.201$ мг/л). Концентрация простейшей P быстрее принимает значения близкие к нулю с ростом константы k - скорости изъятия органических загрязнений. Концентрация бактерии X на рис. 4. (а) устанавливается на меньшем уровне, чем на рис. 2, а на рис 4. (б, в) падает до значений близких к нулю.

В [2] рассматривается модель, которая описывается следующей пищевой цепью:



Предполагается, что реснитчатая питается более эффективной бактерией (X_1), удельная скорость роста которой $f_{max}=0.43$ сут⁻¹. Применяя биофильтр к данной задаче, получим:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{\mu_{max1}X_1L}{Y(K_{L1} + L)} - \frac{\mu_{max2}X_2L}{Y(K_{L2} + L)} - kL, \\ \frac{dX_1}{dt} = \frac{\mu_{max1}X_1L}{K_{L1} + L} - DX_1 - \frac{f_{max1}X_1P}{Y(K_{X1} + X_1)}, \\ \frac{dX_2}{dt} = \frac{\mu_{max2}X_2L}{K_{L2} + L} - DX_2, \\ \frac{dP}{dt} = -DP + \frac{f_{max1}X_1P}{K_{X1} + X_1}, \\ L(0) = L^0, X_1(0) = X_1^0, X_2(0) = X_2^0, P(0) = P^0. \end{cases} \quad (9)$$

Задачу Коши (9) аппроксимируем разностной, с использованием неявного метода Эйлера. Проверка на устойчивость данного метода осуществляется с помощью численного эксперимента, аппроксимация и сходимость исследуются аналогично [2].

Результаты решения задачи, исследованной в [2] без использования биофильтра и задачи (9) при различных константах k представлены в виде графиков на рис. 5.

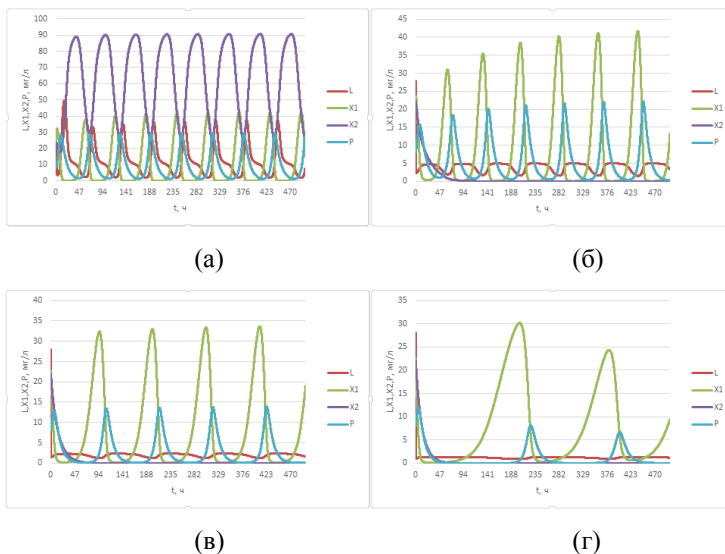


Рис. 5. Результаты численных расчетов модели, описываемой пищевой цепью (8): (а) без использования биофильтра; (б, в, г) с использованием биофильтра; (б) $k = 3.96$; (в) $k = 8.5$; (г) $k = 14.8$

На рис. 5 (б-г) наблюдается уменьшение интенсивности колебания L после применения биофильтра. При увеличении константы k , значение концентрации L становится меньше и останавливается приблизительно на одном уровне, 1 мг/л (рис. 5. (г)), что говорит об эффективном применении биофильтра. Однако полной очистки не происходит.

Выводы. В работе рассматривается модель Кенейла и ее модификации с использованием и без использования биофильтра. Модели представляют собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для реализации моделей используется неявный метод Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости данного метода. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков, построенных в Excel.

Анализ результатов показывает, что применение биофильтра к моделям значительно ускоряет время падения концентрации до своего минимального значения, а также, что с увеличением константы скорости изъятия органических загрязнений k , уровень, на котором останавливается концентрация субстрата, с течением времени значительно ниже, чем без использования биофильтра.

Список литературы

- [1] Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. - М.:Наука. - 1983. – С.156.
- [2] Михайлов М.Д. Хуторная А.И. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на основе модели Кенейла // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сборник статей. - Томск : Издательский Дом Томского государственного университета. - 2018. – С.101—109.

- [3] Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. – 2-е изд., под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2000. – С.348.
- [4] Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. - Томск: изд-во ТГУ. - 2007. - ч.2. – С.287.
- [5] Воронов Ю.В., Яковлев С.В. Биологические фильтры. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат. – 1982. – С.120.
- [6] Curds C.R. Computer simulations of some complex microbial food chains // Water Research. - 1974. - Vol.8, №10. - P.769—780.

Построение хеджирующих стратегий для европейских опционов с потреблением

Борькина Э. Б.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: elya.borkina@gmail.com

Аннотация. Построение хеджирующих стратегий считается одной из важнейших задач, возникающих в теории (B, S) -рынков. Рассматривается приведенная модель Блэка–Шоулса в непрерывном времени с двумя финансовыми активами, также строится хеджирующая стратегия для европейских опционов с потреблением для приведенной модели.

Ключевые слова: мартингал, стохастический интеграл, хеджирующая стратегия, модель Блэка – Шоулса, европейский опцион.

Введение. Финансовые рынки, представляющие собой основу рыночных отношений, являются важными показателями состояния экономики в целом. Составной частью финансового рынка является рынок ценных бумаг, на котором происходит перераспределение денежных средств с помощью таких финансовых инструментов, как ценные бумаги. Существует большое количество видов ценных бумаг таких, как облигации, акции, опционы, фьючерские контракты и варранты.

Расчет рыночной стоимости, распределение ресурсов между финансовыми активами, а также определение времени, в которое наиболее выгодно купить (продать) и предъявить к исполнению ценные бумаги являются одними из основных задач финансовой математики.

Л. Башелье был первым, кто для описания динамики цен акций обратился к моделям случайных блужданий и их предельным образованиям, которые, есть не что иное, как броуновское движение. Считая, что цены акций изменяются как броуновское движение, он провел ряд расчетов для стоимостей некоторых опционов и после сравнил их с ценами на рынках.

П. Самуэльсон заметил, что использование винеровского процесса в линейной модели Башелье нельзя назвать удовлетворительным, поскольку цены могут принимать отрицательные значения. В 1965 г. П. Самуэльсон ввел геометрическую (также называют - экономической) модель броуновского движения. Именно данная модель и стала основой модели Блэка–Мерттона–Шоулса, которая связана с формулой Блэка–Шоулса для рациональной стоимости опциона купли европейского типа, выведенная в 1973 году.

Идея рациональной стоимости Блэка–Шоулса заключалась в том, что эта стоимость должна быть той минимальной величиной начального капитала, которая давала бы продавцу опциона возможность построить хеджирующий портфель.

Задачей данной работы является построение хеджирующей стратегии для европейского опциона купли с потреблением. При решении этой задачи изучена теорема о представлении квадратично интегрируемых мартингалов. Основным результатом являются формулы для вычисления стоимости опциона и хеджирующей стратегии. Приведены результаты численного моделирования Монте–Карло для конкретной финансовой модели.

Постановка задачи. Сначала напомним некоторые сведения из финансовой математики, заимствованные из [2], [3].

Рассмотрим (B, S) – рынок, будем предполагать, что рынок с двумя активами – банковским счетом $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и акцией $S = (S_t)_{t \geq 0}$ – функционирует непрерывно во времени.

Предполагается, что $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – определенная функция с

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad (1)$$

где $B_0 > 0$, $r \geq 0$ – процентная ставка, и (1) удовлетворяет уравнению

$$dB_t = rB_t dt. \quad (2)$$

Изменение стоимостей рискового актива $S = (S_t)_{t \geq 0}$, будем рассматривать на каноническом фильтрованном винеровском пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t^W)_{0 \leq t \leq T}, P)$. П. Самуэльсон записал модель «геометрического» броуновского движения, согласно которой S – это случайный процесс с

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad (3)$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ - винеровский процесс (броуновское движение), $\sigma > 0$ - волатильность, $\mu \in \mathbb{R}$ - коэффициент роста или норма возврата.

Используя формулу Ито, находим, что стохастический дифференциал

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t), \quad (4)$$

или, в интегральной форме,

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u (\mu du + \sigma dW_u). \quad (5)$$

Определение 1. Моделью Блэка–Шоулса называется модель, в которой движения безрискового и рисковогo активов описываются стохастическими дифференциальными уравнениями (2) и (4).

В работе рассматривается частный случай модели Блэка–Шоулса при $r = 0, \mu = 0, B_t = 1$.

Предположим, что на финансовом рынке динамика цен безрискового $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$ и рисковогo $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ активов задается приведенной моделью Блэка–Шоулса вида

$$\begin{cases} B_t = 1, \\ dS_t = \sigma S_t dW_t, S_0 > 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\sigma > 0$ - волатильность.

Определим европейский опцион купли, который предъявляется в момент времени T и задается квадратично интегрируемой платежной функцией

$$h_T = (S_T - K)_+, \quad (7)$$

где $K > 0$ – фиксированная постоянная (цена страйк). Требуется построить стратегию π с потреблением $C = (C_t)_{0 \leq t \leq T}$ такую, что $X_T^{(\pi, C)} \geq h_T$ п.н..

Капитал определяется формулой

$$X_T^{(\pi, C)} = X_0^{(\pi, C)} + \int_0^T \gamma_u dS_u - \int_0^T dC_u, \quad (8)$$

где сток акций $\int_0^T \gamma_t^2 dt < \infty$ п.н..

Для решения задачи хеджирования нам понадобятся некоторые определения и теорема.

Определение 2. Портфелем (стратегией) называется согласованный с фильтрацией случайный процесс $\Pi: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$, где β_t и γ_t – количество безрисковых и рискованных активов соответственно.

Капитал этого портфеля определяется формулой:

$$X_t^\pi = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t \quad (9)$$

Определение 2. Стратегию $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ будем называть самофинансируемой, если для капитала $X = (X_t^\pi)_{t \geq 0}$, определяемого формулой (9) выполняется

$$X_t^\pi = X_0 + \int_0^t \gamma_u dS_u + \int_0^t \beta_u dB_u \quad (10)$$

с условиями (**P**-п.н., $t > 0$)

$$\int_0^t \gamma_u^2 du < \infty, \int_0^t |\beta_u| du < \infty.$$

Определение 3. Самофинансируемая стратегия $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ называется хеджирующей, если $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, $X_T^\pi \geq h_T$ п.н..

Определение 4. Величина $C_0 = \inf\{x > 0: \Pi(x, h_T) \neq \emptyset\}$ называется инвестиционной стоимостью, обеспечивающей в момент времени T получение капитала, не меньшего h_T .

Дадим формулировку теоремы о представлении квадратично интегрируемых мартингалов.

Теорема 1. Пусть $X = (X_t, F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ - квадратично интегрируемый мартингал и $W = (W_t, F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ - винеровский процесс относительно естественной фильтрации. Предположим, что семейство σ -алгебр $(F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ непрерывно справа. Тогда найдется случайный процесс $(\alpha(t, \omega), F_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ с $E \int_0^T \alpha^2(t, \omega) dt < \infty$, такой, что для всех $0 \leq t \leq T$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, \omega) dW_s$$

и

$$\langle X, W \rangle_t = \int_0^t \alpha(s, \omega) ds \quad (11)$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ - взаимная квадратическая характеристика.

Построение хеджирующей стратегии. Построение стратегии в случае приведенной модели (6) для европейского опциона с платежной функцией (7) осуществляется с помощью теоремы 1 (см п. 2). Применим ее к мартингалу

$$M_t = \mathbf{E} \left(h_T + \int_0^T C_u du \middle| \mathbb{F}_t^W \right). \quad (12)$$

Надо найти согласованный с фильтрацией $(\mathbb{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ квадратично интегрируемый процесс $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$, такой, что для всех $0 \leq t \leq T$

$$M_t = \mathbf{E} \left(h_T + \int_0^T C_u du \middle| \mathbb{F}_t^W \right) = M_0 + \int_0^t \alpha_u dW_u = M_0 + \int_0^T \gamma_u dS_u,$$

где $\gamma_u = \frac{\alpha_u}{\sigma S_u}$.

Заметим, что $X = M_0 = \mathbf{E}(h_T + \int_0^T C_u du)$ определяет стоимость опциона. Тогда стратегия $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ будет строиться по следующим формулам:

$$\beta_t = M_t - \gamma_t S_t - \int_0^t C_u du.$$

Из определения 3 (см п. 2) следует

$$\begin{aligned}
 X_t^\pi &= M_t - \int_0^t C_u du = M_0 + \int_0^T \gamma_u dS_u - \int_0^t C_u du \\
 &= X + \int_0^T \gamma_u dS_u - \int_0^t C_u du.
 \end{aligned}$$

Построим хеджирующую стратегию в момент T :

$$X_T^\pi = M_T - \int_0^T C_u du,$$

где $M_T = \mathbf{E} \left(h_T + \int_0^T C_u du \mid \mathbb{F}_T^W \right) = h_T + \int_0^T C_u du$.

Тогда

$$X_T^\pi = h_T. \quad (12)$$

Численное моделирование. Вычислим стоимость опциона в момент времени $T = 1$, используя определение 4 (см п. 2)

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \mathbf{E} \left(h_1 + \int_0^1 C_u du \right) = E \left((S_1 - K)_+ + \alpha \int_0^1 S_u du \right), \quad \text{здесь} \\
 C_u &= \alpha S_u.
 \end{aligned}$$

Предположим, что $K = S_0$, тогда

$$C_1 = E \left((S_1 - S_0)_+ + \alpha \int_0^1 S_u du \right)$$

Математическое ожидание будем вычислять по методу Монте-Карло, тогда получим

$$\begin{aligned}
 E \left((S_1 - S_0)_+ + \alpha \int_0^1 S_u du \right) &= \\
 &= \frac{1}{L} \left(\sum_{l=1}^L \left((S_1 - S_0)_+ + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m S_{t_j} \right) \right),
 \end{aligned}$$

где $S_1 - S_0 = S_0 \left(\exp \left\{ \sigma W_1 - \frac{\sigma^2}{2} \right\} - 1 \right)$.

Для начала построим винеровский процесс следующим образом. Моделируем n независимых гауссовских случайных величин $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ с параметрами $(0, 1)$. Приращения винеровского процесса также распределены нормально с нулевым средним и дисперсией, равной длине приращения. Тогда винеровский процесс можно определить следующим выражением

$$W_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n \cdot t]} \xi_i \quad (14)$$

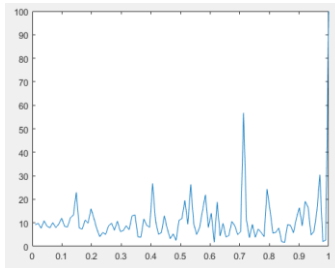


Рис. 1. График рискового актива S_t

Численное моделирование проводится в среде MatLab. По полученным результатам построен график рискового актива S_t . Здесь взяли $S_0 = 10$, $0 \leq t \leq 1$.

Список литературы

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: МЦНМО. – 2016. - Т. 2. - С.801—811.

[2] Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.

К теории расчетов опционов европейского и американского типов II. Непрерывное время// Теория вероятностей и ее применения. - 1994. - Т.39. Вып.1. - С.81—90.

[3] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.:Наука. - 1979.

О последовательном оценивании параметров авторегрессионной модели с непрерывным временем

Хабарова Е. Л., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: flo-00@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача оценивания параметров авторегрессионной модели второго порядка с непрерывным временем. Предлагается последовательный план идентификации модели на основе оценок максимального правдоподобия. Для построения плана используется модифицированная выборочная информационная матрица Фишера. Доказывается, что полученные оценки имеют нормальное распределение.

Ключевые слова: авторегрессия с непрерывным временем, метод максимального правдоподобия, нормальное распределение, последовательное оценивание, момент остановки.

Актуальность и история вопроса. Многие процессы в физике, химии, биологии, экономике описываются стохастическими дифференциальными и стохастическими разностными уравнениями. Однако, прежде чем их использовать, необходимо оценить параметры этих уравнений. Поэтому оценивание параметров стохастических

дифференциальных и разностных уравнений — одна из наиболее актуальных задач современного анализа данных.

Для оценивания параметров имеется немало различных методов (метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов и другие), однако, в случае зависимых наблюдений эти оценки являются нелинейными функциями, что создает сложности в исследовании их свойств.

Один из методов решения задачи оценивания параметров в неасимптотической постановке — это метод последовательного оценивания, предложенный Липцером и Ширяевым [1] для оценки параметра уравнения:

$$dX_t = \theta f_t dt + dW_t.$$

Ими было предложено заменить детерминированный промежуток наблюдений $[0, T]$ на промежуток случайной длины $[0, \tau(H)]$, где

$$\tau(H) = \inf \left\{ T > 0: \int_0^T f_s^2 ds = H \right\}.$$

Как оказалось, предложенная в [1] оценка обладает очень хорошими свойствами. Она является нормальной, несмещенной и ее среднеквадратическая погрешность не превышает $\frac{1}{H}$.

Однако, в случае, когда количество параметров превышает размерность процесса, возникают сложности с построением такого же красивого аналога. Решению этой

проблемы посвящено немало работ. Например, в этом направлении были сделаны следующие продвижения:

- Коневу и Пергаменщикову удалось построить двухшаговую последовательную процедуру (без учета априорной информации об области параметров) для моделей авторегрессионного типа [2];
- Коневу и Емельяновой удалось построить более простую процедуру (одноэтапную), но с учетом априорной информации [3].

Цель нашей работы — построить последовательную оценку с нормальным распределением для двухпараметрической авторегрессионной модели с непрерывным временем.

Постановка задачи. Построение последовательной оценки. Рассмотрим задачу оценивания параметров авторегрессионной модели второго порядка по наблюдениям процесса X_t :

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t)dt + dW_t, \quad (1)$$

или в векторном виде:

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \quad \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{X}_t \\ X_t \end{pmatrix} dt + dW_t,$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ — вектор-столбец неизвестных параметров, штрих обозначает транспонирование, W_t — винеровский процесс.

Оценка максимального правдоподобия вектора θ по наблюдениям процесса (1) на промежутке $[0, T]$ имеет вид

$$\theta_T^* = M_T^\pm \int_0^T (\dot{X}_t, X_t)' dX_t, \quad (2)$$

где

$$M_T = \begin{pmatrix} \int_0^T \dot{X}_s^2 ds & \int_0^T \dot{X}_s X_s ds \\ \int_0^T \dot{X}_s X_s ds & \int_0^T X_s^2 ds \end{pmatrix}$$

— выборочная информационная матрица Фишера, M_T^\pm — обратная к M_T матрица, если она невырождена, и $M_T^\pm = 0$ — в противном случае.

Задача — построить последовательную оценку максимального правдоподобия, имеющую неасимптотическое нормальное распределение для любых возможных параметров.

Введем систему моментов остановки и произведем некоторую модификацию выборочной информационной матрицы Фишера.

Для произвольного порога $h > 0$ введем моменты остановки $\tau_i(h)$, $i = 0, 1, 2$ по следующим формулам:

$$\tau_0(h) = 0, \\ \tau_1 = \inf \left\{ T > 0: \int_0^T \dot{X}_s^2 ds = h \right\}, \quad (3)$$

$$\tau_2(h) = \inf \left\{ T > \tau_1(h) : \int_{\tau_1(h)}^T X_s^2 ds = h \right\}.$$

Пусть

$$m(h) = \begin{pmatrix} \tau_1(h) & \tau_1(h) \\ \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s^2 ds & \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s X_s ds \\ \tau_2(h) & \tau_2(h) \\ \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} \dot{X}_s X_s ds & \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s^2 ds \end{pmatrix} \quad (4)$$

— модифицированная выборочная информационная матрица Фишера.

Определим вектор $V(h) = (V_1(h), V_2(h))'$ по формулам

$$\begin{aligned} V_1(h) &= \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dX_s, \\ V_2(h) &= \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s dX_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим последовательную оценку вектора неизвестных параметров θ равенством:

$$\theta^* = m^{-1}(h)V(h) \quad (6)$$

или подробнее

$$\begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s^2 ds & \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s X_s ds \\ \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} \dot{X}_s X_s ds & \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s^2 ds \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dX_s \\ \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s dX_s \end{pmatrix}.$$

Основной результат

Теорема 1. Пусть задан процесс

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t) dt + dW_t.$$

Пусть оценки вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ определяются формулами (3)—(6). Тогда для любого $\theta \in \mathbb{R}^2$ и $h > 0$

$$\frac{m(h)}{\sqrt{h}} (\theta^*(h) - \theta) \in N(0, I_2),$$

где I_2 — единичная матрица размера 2×2 .

Доказательство. Для доказательства нормальности вектора θ^* достаточно показать нормальность любой линейной комбинации его компонент. [4]

Представим элементы вектора V в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_1(h) &= \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dX_s = \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s \left((\theta_1 \dot{X}_s + \theta_2 X_s) ds + dW_s \right) = \\ &= \int_0^{\tau_1(h)} \left(\theta_1 \dot{X}_s^2 + \theta_2 \dot{X}_s X_s \right) ds + \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dW_s = \langle m(h)\theta \rangle_i + \eta_i(h), \end{aligned}$$

аналогично

$$V_2(h) = \langle m(h)\theta \rangle_2 + \eta_2(h),$$

где $\langle m(h)\theta \rangle_i$ — i -ая строка матрицы $m(h)$, умноженная на вектор θ ,

$$\eta_1(h) = \int_0^{\tau_1(h)} \dot{X}_s dW_s, \quad \eta_2(h) = \int_{\tau_1(h)}^{\tau_2(h)} X_s dW_s.$$

Обозначим $\eta(h) = (\eta_1(h), \eta_2(h))'$, тогда

$$V(h) = m(h)\theta + \eta(h),$$

$$\eta(h) = m(h)(\theta^*(h) - \theta).$$

Докажем, что вектор $\frac{\eta(h)}{\sqrt{h}}$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для этого достаточно показать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}^2$ характеристическая функция случайной величины

$$\zeta(h) = \frac{\lambda' \eta(h)}{\sqrt{h}} = (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} \frac{\eta_1(h)}{\sqrt{h}} \\ \frac{\eta_2(h)}{\sqrt{h}} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1 \eta_1(h)}{\sqrt{h}} + \frac{\lambda_2 \eta_2(h)}{\sqrt{h}}$$

имеет вид

$$\varphi_{\zeta(h)}(u) = \mathbb{E} e^{iu\zeta(h)} = e^{-\frac{\lambda' \lambda u^2}{2}}.$$

Вычисляя повторные условные математические ожидания и учитывая, что

$$E\left(e^{iu\frac{\lambda_j\eta_j(h)}{\sqrt{h}}}/F_{\tau_{j-1}}\right) = e^{-\frac{\lambda_j^2 u^2}{2}}, \quad [1]$$

получим

$$\begin{aligned} Ee^{iu\zeta(h)} &= Ee^{iu\left(\frac{\lambda_1\eta_1(h)}{\sqrt{h}} + \frac{\lambda_2\eta_2(h)}{\sqrt{h}}\right)} = E\left(e^{iu\frac{\lambda_1\eta_1(h)}{\sqrt{h}}} \cdot e^{iu\frac{\lambda_2\eta_2(h)}{\sqrt{h}}}\right) = \\ &= E\left(E\left(e^{iu\frac{\lambda_1\eta_1(h)}{\sqrt{h}}}/F_0\right)\right) \cdot E\left(E\left(e^{iu\frac{\lambda_2\eta_2(h)}{\sqrt{h}}}/F_{\tau_1}\right)\right) = \\ &= Ee^{-\frac{\lambda_1^2 u^2}{2}} \cdot Ee^{-\frac{\lambda_2^2 u^2}{2}} = e^{-\left(\frac{\lambda_1^2 u^2}{2} + \frac{\lambda_2^2 u^2}{2}\right)} = e^{-(\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{\lambda'u^2}{2}}. \end{aligned}$$

Итак, в работе построена последовательная оценка максимального правдоподобия с нормальным распределением для любых возможных параметров двухпараметрической авторегрессионной модели с непрерывным временем.

Список литературы

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. - 1974. – С.696.
- [2] Конев, В.В. Гарантированное оценивание периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами / В.В. Конев, С. М. Пергаменщиков

// Проблемы передачи информации. – 1997. – Т. 33, вып. 4. – С.26—44.

[3] Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2013. № 5(25). - С.12—25.

[4] Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. - 1980. – С.576.

[5] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАЛИТ; Лаборатория Базовых Знаний. - 2003. – С.400.

О подходе к идентификации стохастической динамической системы

Шерстобитова А. О., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: annasherstobitova06@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача оценивания параметров процесса непрерывной авторегрессии второго порядка ($AR(2)$). С помощью специального правила остановки осуществляется построение последовательного плана $\{\tau(H), \theta(H)\}$. Для вычисления момента остановки, а также получения последовательных оценок параметров авторегрессионной модели проводится численное моделирование Монте-Карло.

Ключевые слова: последовательное оценивание, момент остановки, информационная матрица Фишера.

В теоретических и прикладных исследованиях, связанных с задачами идентификации, фильтрации, прогнозирования временных рядов, широко используются динамические системы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Для оценивания неизвестных параметров этих систем разработаны различные методы (максимального правдоподобия (МП), стохастической аппроксимации, наименьших квадратов (МНК) и др.). Наиболее изучены в теории идентификации асимптотические свойства оценок,

полученных в предположении, что процесс наблюдений динамической системы может продолжаться достаточно долго. При практическом использовании оценок обычно исходят из того, что для малых и умеренных объемов данных свойства оценок несущественно отличаются от асимптотических. Однако это условие выполняется не всегда и может приводить к ошибочным выводам. Поэтому представляет интерес задача неасимптотического анализа свойств оценок. Важный результат в теории неасимптотического оценивания получен в [1]-[2], где был предложен последовательный план оценивания параметра диффузионного процесса со специальным правилом прекращения наблюдений, превосходящий по качеству классическую оценку по методу максимального правдоподобия. Последовательный план из [1]-[2] дает возможность оценить неизвестный параметр диффузии с заданной среднеквадратической точностью по конечной реализации процесса. Информацию о дальнейшем развитии последовательных методов для решения задач идентификации стохастических динамических систем с непрерывным и дискретным временем можно найти в работах [3], [4] и др.

Рассматривается задача оценивания параметров авторегрессионной модели $AR(p)$ с непрерывным временем вида

$$dX_t = \theta' X_t dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

по наблюдениям процесса X_t на промежутке $[0; T]$. Предлагается последовательная процедура оценивания вектора

неизвестных параметров со специальными правилами остановки наблюдений, определяемыми с помощью модификации выборочной информационной матрицы Фишера. На примере авторегрессионной модели второго порядка ($AR(2)$) проводится численное моделирование для вычисления момента остановки, а также получения последовательных оценок параметров авторегрессионной модели с непрерывным временем.

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \|a_{ij}\|$ по наблюдениям процесса X_t . К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p -го порядка ($AR(p)$)

$$dx_t^{p-1} = (\theta_1 x_t^{p-1} + \dots + \theta_p x_t) dt + \sigma dw_t \quad (2)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|Q(i\lambda)|^2}$. Предполагается, что неизвестные параметры $\theta_i, i = \overline{1, p}$, таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \dots - \theta_p$ лежат в единичном круге.

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d\langle X_t \rangle_p, \quad (3)$$

где $\langle \alpha \rangle_i$ обозначает i -ю координату вектора-столбца $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$

$$M_T = \int_0^T X_s X_s' ds \quad (4)$$

– выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1} – обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1} = 0$ – в противном случае [5].

Хорошо изучены асимптотические свойства вектора оценок $\hat{\theta}_T$ по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов: они являются сильно состоятельными и асимптотически нормальными [6].

Рассмотрим последовательный план оценивания для модели авторегрессии второго порядка ($AR(2)$) с непрерывным временем

$$dX_t = \theta' X_t dt + \sigma dW_t,$$

$W = (W_t^1, \dots, W_t^n)_{t>0}$ – винеровский процесс, $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ – вектор оцениваемых параметров.

Пусть $H > 0$. Определим длительность наблюдений процесса и оценку неизвестных параметров по формулам

$$\begin{cases} \tau_1(H) = \inf \{ T > 0 : \int_0^T x_s^2 ds = H \}, \\ \tau_2(H) = \inf \{ T > \tau_1(H) : \int_{\tau_1(H)}^T x_s^2 ds = H \} \end{cases} \quad (5)$$

Введем вспомогательный вектор v вида

$$v = \begin{pmatrix} \int_0^{\tau_1(H)} \dot{x}_s ds \\ \int_{\tau_1(H)}^{\tau_2(H)} x_s ds \end{pmatrix}$$

Таким образом, оценка неизвестного вектора параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ имеет вид

$$\hat{\theta}_{\tau(H)} = M_{\tau(H)}^{-1} \cdot v, \quad (6)$$

где $M_{\tau(H)}^{-1}$ – модифицированная информационная матрица Фишера.

Для авторегрессионной модели с непрерывным временем было проведено численное моделирование в среде Matlab для вычисления моментов остановки, а также оценивания неизвестных параметров модели.

Для осуществления моделирования непрерывного процесса авторегрессии был выполнен переход от стохастического дифференциального уравнения к системе разностных уравнений вида

$$\begin{cases} x_{t_k} = \frac{x_{t_{k-1}}(2-\theta_1\Delta t) - x_{t_{k-2}} + \Delta t^2 \xi_{t_k}}{1-\theta_1\Delta t - \theta_2\Delta t^2}, \\ \dot{x}_{t_k} = \frac{x_{t_k} - x_{t_{k-1}}}{\Delta t}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины из нормального распределения с параметрами $(0, 1)$, Δt – шаг дискретизации.

Рассмотрим результаты моделирования для процесса авторегрессии с непрерывным временем. Моделирование реализуется при условиях: $\Delta t = 0.1$, $x_0 = 0$, объем выборки $N = 750$, порог процедуры $H = 150$, $\hat{\theta}_{\tau(H)}$ - последовательная оценка неизвестного вектора параметров. Оценки параметров представлены в виде усредненного результата оценивания по 100 реализациям.

На рисунках 1, 2 представлены иллюстрации отклонения полученных последовательных оценок от истинного значения параметра, вычисленных случайные моменты остановки $\tau_1(H)$, $\tau_2(H)$ при истинном значении параметров $\theta = (0.3, 0.5)$.



Рис. 1. Отклонение моделируемых оценок от истинного значения параметра $\theta_1 = 0.3$

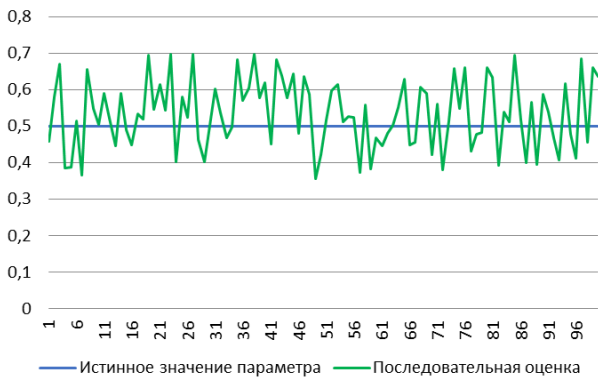


Рис. 2. Отклонение моделируемых оценок от истинного значения параметра $\theta_2 = 0.5$

Для полученных оценок выполнены проверки гипотезы о принадлежности выборки оценок нормальному распределению. Для проверки указанной гипотезы использовались критерии Шапиро-Уилка, Андерсона-Дарлинга, Лиллиефорса, а также критерий Пирсона. В следующей таблице представлены результаты выполнения тестов для проверки гипотезы о принадлежности выборки оценок нормальному распределению.

Таблица 1. Результаты проверки гипотезы о принадлежности выборки оценок нормальному распределению

	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
Критерий Шапиро-Уилка	+	+
Критерий Андерсона-Дарлинга	+	+
Критерий Лиллиефорса	+	+
Критерий Пирсона	+	+

Кроме того, строится двумерная гистограмма распределения полученных оценок.

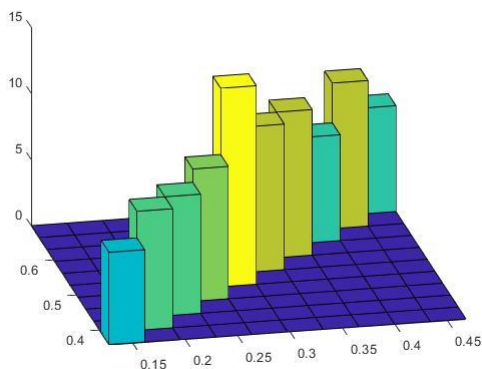


Рис. 3. Гистограмма распределения оценок $\hat{\theta}_{\tau(H)}$

Таким образом, показано, что оценки, построенные с помощью представленной последовательной процедуры оценивания имеют небольшие отклонения от истинных значений параметров. Также проиллюстрировано, что

построенные таким образом оценки вектора неизвестных параметров имеют неасимптотическое нормальное определение.

Список литературы

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука. - 1974.
- [2] Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов // Теор. Вероятн. и ее применен. - 1971. - Т. 16. Вып. 2. - С.304—396.
- [3] Борисов В.З., Конев В.В. Последовательное оценивание параметров дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1978. - №10. – С.58—64.
- [4] Васильев В.А., Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука. - 2004.
- [5] Емельянова Т. В., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского гос. у-та: Математика и механика. - №5(25). – Томск. – 2013. - С.12—25.
- [6] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука. - 1979.

Конформное отображение на круговой многоугольник типа ПОЛОСЫ

Бондаренко В. В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: vladislava9001@gmail.com

Аннотация. Получено аналитическое представление голоморфного в полосе отображения с симметрией переноса вдоль вещественной оси в виде дифференциального уравнения.

Ключевые слова: круговой многоугольник, симметрия переноса, производная Шварца, конформные отображения.

Введение

Определение 1.1. Односвязную область $\Delta \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- область Δ инвариантна относительно сдвига $L(w) = w + 2\pi$;
- при преобразовании L на бесконечности остаются неподвижными 2 простых конца границы Δ ;
- граница области Δ от точки s до $s + 2\pi$ состоит из конечного числа дуг окружностей,

будем называть *круговым многоугольником типа полосы с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π* .

Согласно теореме Римана, существует однолистное и конформное отображение f , $f(z) = w$ из полосы

$$D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < h\}$$

на круговой многоугольник Δ типа полосы. На f накладываем условие $f(z + 2k) = f(z) + 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $z \in D$.

Перед нами стоит задача: найти уравнение для голоморфного и однолистного отображения полосы на круговой многоугольник типа полосы.

Обозначим через $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z = 0\}$ вещественную ось, через $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z = h\}$ оставшуюся часть границы полосы D , обозначим их образы через $f(\gamma_1) = \Gamma_1$ и $f(\gamma_2) = \Gamma_2$. Двигаясь от точки $w_0 \in \Gamma_1$ ($w_0 \in \Gamma_2$) к точке $w_0 + 2\pi$ по границе области Δ в положительном направлении (отрицательном), будем обозначать последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_k^j (B_s^j)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, m}$, причем $A_k^j = A_k^0 + 2\pi j$ и $B_s^j = B_s^0 + 2\pi j$, $j \in \mathbb{Z}$. Углы при вершинах $A_k^j (B_s^j)$ обозначим через $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ ($\beta_1\pi, \dots, \beta_m\pi$ соответственно). Прообразы вершин A_k^j обозначим через $a_k^j \in \gamma_1 \subset \partial D$, а прообразы вершин B_s^j — через $b_s^j \in \gamma_2 \subset \partial D$. Интервалы (a_k^j, a_{k+1}^j) и (b_s^j, b_{s+1}^j) обозначим соответственно l_k^j , t_s^j . Когда точка z пробегает интервал $l_k^j (t_s^j)$, точка $w = f(z)$ пробегает дугу $L_k^j (T_s^j)$ границы Δ , от точки A_k^j до точки A_{k+1}^j (соответственно от B_s^j до B_{s+1}^j).

Аналитическое продолжение отображения с симметрией переноса. Отображение $f(z)$ голоморфно в полосе D включая интервалы l_k^j, t_s^j и, согласно принципу симметрии Римана-Шварца, аналитически продолжается через эти интервалы. Продолжим отображение f из области D через интервал l_k^j в область $D^* = \{z \in \mathbb{C}: -h < \text{Im } z < 0\}$ согласно принципу симметрии. Получим функцию $f^*(z)$, конформно отображающую область D^* на круговой многоугольник Δ^* симметричный Δ относительно L_k^j . Это голоморфное отображение можно снова продолжить через любой интервал $l_{k'}^j$ в область D , при этом новое аналитическое продолжение $f^{**}(z)$ будет реализовывать конформное отображение области D на многоугольник Δ^{**} , симметричный многоугольнику Δ^* относительно дуги $L_{k'}^j$. Выполняя все возможные аналитические продолжения описанного вида, мы получим бесконечнозначную аналитическую функцию. Для нее исходная функция $f(z)$ является в полосе D одной из однозначных ветвей. Заметим, что различные ветви $f(z)$ и $f^{**}(z)$, заданные в D , связаны дробно-линейным преобразованием

$$f^{**}(z) = \frac{af(z)+b}{cf(z)+d}, \quad ad - cb \neq 0.$$

Определение 2.1. Пусть функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в односвязной области D , $f'(z) \neq 0$, тогда

$$F(z) = \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

называется *производной Шварца функции $f(z)$ в D* .

Замечание 1. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ инвариантна относительно дробно-линейного преобразования функции f .

Особые точки функции $\{f(z), z\}$. Изучим поведение функции F в ее изолированных особых точках. Обозначим прообраз одной из вершин через $\xi \in \{a_k^j, b_s^j: j \in \mathbb{Z}, k = \overline{1, n}, s = \overline{1, m}\}$, $f(\xi)$ обозначим через W . Тогда $\psi \in \{\alpha_k, \beta_s: k = \overline{1, n}, s = \overline{1, m}\}$, где ψ – угол при вершине W . Рассмотрим 3 случая:

- угол при вершине W образован прямолинейными отрезками, $\psi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$;
- угол при вершине W образован дугами окружностей, или дугой окружности и отрезком прямой, $\psi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$;
- угол при вершине W образован дугами окружностей, или дугой окружности и отрезком прямой, $\psi \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

Рассмотрим первый случай. Линейным отображением $\omega_1(w) = (w - W)e^{i\varphi}$ переведем область $U(W, \varepsilon) \cap \Delta$, где $U(W, \varepsilon)$ – некоторая окрестность точки W радиуса $\varepsilon > 0$, в прямолинейный угол с вершиной в начале координат. Причем φ выбираем так, чтобы точки из окрестности $U(W, \varepsilon) \cap \Delta$ переходили в точки $0 < \arg \omega_1 < \pi$ некоторой окрестности нуля. Преобразованием $\omega_2 = \omega_1^{\frac{1}{\psi}}$ переведем этот угол на лежащую в верхней полуплоскости ω_1 -плоскости часть окрестности точки ноль. Причем участок вещественной оси в окрестности точки ξ переходит в участок вещественной оси в окрестности точки $\omega_2 = 0$. Введем обозначение $\chi(z) =$

$\omega_2(\omega_1(f(z)))$. Функция $\chi(z)$ согласно принципу симметрии продолжается на полную окрестность точки z и, являясь голоморфной функцией, представляется рядом

$$\chi(z) = c_1(z - \xi) + c_2(z - \xi)^2 + \dots,$$

где $c_1 \neq 0$. Все коэффициенты c_i вещественны, так как при вещественных z вблизи точки $z = \xi$ функция ω_2 вещественна.

Так как $\chi(z) = ((f(z) - W)e^{i\varphi})^{\frac{1}{\psi}}$, находим, что в окрестности точки ξ функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = W + (z + \xi)^\psi \lambda_k(z),$$

где $\lambda_k(z) = (c_1 + c_2(z - \xi) + \dots)^\psi e^{-i\varphi}$, $c_1 \neq 0$.

Разложение $\lambda_k(z)$ в точке ξ имеет вид

$$\widetilde{\lambda}_k(z) = e^{-i\varphi} c_1^\psi + c_1^{\psi-1} \psi e^{-i\varphi} c_2 (z - \xi) \dots$$

Тогда разложение функции $f(z)$ в окрестности точки ξ примет окончательный вид

$$f(z) = W + (z + \xi)^\psi \widetilde{\lambda}_k(z).$$

Отсюда можно получить разложение для функции $F(z)$ в окрестности точки ξ .

Возьмем производную

$$f'(z) = \psi(z - \xi)^{\psi-1} \widetilde{\lambda}_k(z) + (z - \xi)^\psi \widetilde{\lambda}'_k(z) + \dots,$$

прологарифмируем

$$\begin{aligned} \ln f'(z) &= \ln(z - \xi)^{\psi-1} \left(\psi \widetilde{\lambda}_k(z) + (z - \xi) \widetilde{\lambda}'_k(z) \right) = \\ &= (\psi - 1) \ln(z - \xi) + \ln \left(\psi \widetilde{\lambda}_k(z) + (z - \xi) \widetilde{\lambda}'_k(z) \right), \end{aligned}$$

возьмем производную, получим

$$\begin{aligned} (\ln f'(z))' &= \frac{f''(z)}{f'(z)} = \\ &= \frac{\psi - 1}{z - \xi} + \frac{(\psi + 1)\widetilde{\lambda}'_k(z) + \widetilde{\lambda}''_k(z)(z - \xi)}{\psi\widetilde{\lambda}'_k(z) + (z - \xi)\widetilde{\lambda}''_k(z)} = \frac{\psi - 1}{z - \xi} + S_k(z), \end{aligned}$$

где $S_k(z)$ – голоморфна часть. Возьмем производную от $\frac{f''}{f'}$, получим

$$\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \left(\frac{f'(z)'}{f'(z)}\right)^2 = -\frac{\psi - 1}{(z - \xi)^2} + S'_k(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 &= \left(\frac{\psi - 1}{z - \xi} + S_k(z)\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\psi - 1}{z - \xi}\right)^2 + 2\frac{\psi - 1}{z - \xi}S_k(z) + S_k^2(z) = \\ &= \left(\frac{\psi - 1}{z - \xi}\right)^2 + \frac{2\gamma_0(\psi - 1)}{z - \xi}(\gamma_1 + \gamma_2(z - \xi) + \dots) + S_k^2(z) = \\ &= \left(\frac{\psi - 1}{z - \xi}\right)^2 + \frac{M_k}{z - \xi} + \tilde{\Phi}(z), \end{aligned}$$

где $M_k = 2\gamma_0\gamma_1(\psi - 1)$ – вещественный параметр, $\tilde{\Phi}(z)$ – голоморфная функция.

Получаем разложение F в окрестности точки ξ

$$F(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\psi}{(z-\xi)^2} + S'_k(z) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\psi-1}{z-\xi} \right)^2 + \frac{M_k}{z-\xi} + \Phi(z) \right) = \\
&= \frac{1-\psi^2 + 2M(z-\xi)}{2(z-\xi)^2} + \tilde{\Phi}(z) = \frac{1-\psi^2}{2(z-\xi)^2} + \frac{M_k}{z-\xi} + \tilde{\Phi}(z).
\end{aligned}$$

Вернувшись к начальным обозначениям, получим разложение производной Шварца в окрестностях особых точек в первом случае

$$F(z) = \frac{1-\alpha_k^2}{2(z-\alpha_k^j)^2} + \frac{M_k}{z-\alpha_k^j} + \tilde{\Phi}(z)$$

– разложение в окрестности α_k^j ,

где $j \in Z, k = \overline{1, n}$;

$$F(z) = \frac{1-\beta_s^2}{2(z-b_s^j)^2} + \frac{M_s}{z-b_s^j} + \tilde{\Phi}(z)$$

– разложение в окрестности b_s^j ,

где $j \in \mathbb{Z}, s = \overline{1, m}$.

Теперь рассмотрим случай, когда угол при вершине W образован дугами окружностей, или дугой окружности и прямолинейным отрезком и имеет величину $\psi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Тогда, при достаточном продолжении сторон такого угла, они пересекутся еще в некоторой точке, обозначим ее W^* . Дробно-линейным преобразованием $\omega(\xi) = e^{i\varphi} \frac{\xi-W}{\xi-W^*}$ переведем область $U(W, \varepsilon) \cap \Delta$ в прямолинейный угол с вершиной в начале координат. Далее проделываем те же действия, что описывали

выше и получаем такое же разложение производной Шварца, что и в первом случае.

Наконец рассмотрим случай, когда угол ψ при вершине W имеет величину $0, \pi, 2\pi$, при этом прилегающие стороны могут быть дугами окружностей, или дугой окружности и прямолинейным отрезком. Кроме того, если $\psi = 2\pi$, то угол может быть образован двумя прямолинейными отрезками. В случае, когда угол имеет величину $\psi = \{0, \pi, 2\pi\}$, продолженные стороны такого угла имеют одну общую точку, т. е. они касаются в точке W . С помощью дробно-линейной функции $\omega(w) = \frac{a}{w-W} + b$ переведем вершину W в бесконечно удаленную точку. При этом стороны, прилегающие к вершине, переходят в параллельные прямолинейные отрезки, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Область $U(W, \varepsilon) \cap \Delta$ преобразуются теперь с помощью отображения $\omega(w)$ в прямолинейную полосу. Если выбрать a и b так, чтобы одна из сторон перешла в положительную вещественную полуось, а другую – в прямую $\omega = ic$, то функция $\omega_1(w)$, определяемая равенством

$$\omega_1^\psi + \frac{c}{\pi} \ln \omega_1 = \omega,$$

отображает эту область в верхнюю полуплоскость ω_1 -плоскости в окрестности точки $\omega_1 = 0$. Разложение для производной Шварца получаем то же.

Уравнение для отображения с симметрией переноса.

Рассмотрим разность производной Шварца и главных частей

разложения производной Шварца в ряд Лорана в окрестностях всех особых точек, эта разность будет являться целой функцией

$$\begin{aligned} \theta(z) = F(z) - \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k^j+2ihv)^2} \right. \\ \left. + \frac{M_k}{z-a_k^j+2ihv} \right) - \\ - \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left(\frac{1-\beta_s^2}{2(z-b_s^j+2ihv)^2} + \frac{M_s}{z-b_s^j+2ihv} \right). \end{aligned}$$

Выполним следующие алгебраические преобразования

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k^j+2ihv)^2} = \frac{1-\alpha_k^2}{-8h^2} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{a_k^j-z}{2ih} - v\right)^2}.$$

Обозначим $\frac{a_k^j-z}{2ih} = x$ и учтем [4, с. 50], что

$$\operatorname{cosec}^2 \pi x = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-k)^2},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha_k^2}{-8h^2} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-v)^2} &= \frac{1-\alpha_k^2}{-8h^2} \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi x \\ &= \frac{1-\alpha_k^2}{-8h^2} \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi \frac{a_k^j-z}{2ih}. \end{aligned}$$

Свернем следующий ряд

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k^j + 2ihv} = \frac{1}{2ih} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z - a_k^j}{2ih} + v}$$

Введем обозначение $\frac{z - a_k^j}{2ih} = x$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ih} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + v} &= \frac{1}{2ih} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{x - s} + \frac{1}{2ixh} + \frac{1}{2ih} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{x + s} = \\ &= \frac{2x}{2ih} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - s^2} + \frac{1}{2ixh} = \frac{\pi}{2ih} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2ixh} = \frac{\pi}{2ih} \pi x = \\ &= \frac{\pi}{2ih} \operatorname{ctg} \pi \frac{z - a_k^j}{2ih}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \alpha_k^2}{2(z - a_k^j + 2ihv)^2} = \frac{1 - \alpha_k^2}{-8h^2} \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi \frac{a_k^j - z}{2ih}$$

и

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k^j + 2ihv} = \frac{\pi}{2ih} \operatorname{ctg} \pi \frac{z - a_k^j}{2ih}.$$

Для слагаемых, содержащих b_s^j выполним аналогичные преобразования. Итак, получили следующий результат

Теорема 1. Голomorphic и однолистное отображение $f: D \rightarrow \Delta$, из полосы $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ на круговой многоугольник, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{2h} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-\alpha_k^2}{4h} \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi \frac{z - a_k^j}{2ih} + i \frac{M_k}{\pi} \operatorname{ctg} \pi \frac{z - a_k^j}{2ih} \right) \right) \\
&\quad + \\
&+ \frac{\pi^2}{2h} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left(\frac{1-\beta_s^2}{4h} \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi \frac{z - b_s^j}{2ih} + i \frac{M_s}{\pi} \operatorname{ctg} \pi \frac{z - b_s^j}{2ih} \right) \right) \\
&\quad + \theta(z),
\end{aligned}$$

где M_k, M_s – вещественные параметры; α_k, β_s – углы при вершинах; a_k^j, b_s^j – прообразы вершин, $k = \overline{1, n}, s = \overline{1, m}$; $\theta(z)$ – целая функция.

Список литературы

- [1] Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ. - 2002.
- [2] Колесников И.А. Отображение на круговой многоугольник с симметрией переноса // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. - №2(22). - 2013. - С.33—44.
- [3] Александров И.А. Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Изв. вузов. Матем. - №6. - 1999. - С.15—18.
- [4] Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. 4-е изд., перераб. М.: ГИФМЛ. - 1963.

О периодических функциях нескольких действительных переменных

Соколова Г. К.

Иркутский государственный университет, Иркутск

e-mail: 98gal@mail.ru

Аннотация. Математическое моделирование различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. Эти математические модели имеют вид начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе приведён ряд утверждений о периодических функциях нескольких действительных переменных. Без ограничения общности, рассматриваются периодические функции, имеющие в качестве множества периодов прямоугольную решётку. Формулируются теоремы интегрального исчисления таких функций. В частности, обобщается лемма о представлении интеграла периодической функции одной переменной в виде суммы линейной и периодической функций.

Ключевые слова: периодическая функция нескольких действительных переменных, основной период в данном направлении, m -мерная решётка периодов.

Большое значение в исследовании проблемы существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующая лемма, доказанная в монографии [1] Н. П. Еругина.

Лемма. Пусть функция $f \in C_{[0; +\infty)}$ является периодической с периодом T , тогда

$$\int_0^x f(t)dt = \omega_T[f]x + \varepsilon(x),$$

(1)

где $\omega_T[f] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$ – среднее значение функции f на отрезке $[0, T]$, функция $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ периодическая с периодом T .

Как показано в работе [2], представление (1) однозначно и инвариантно относительно выбора периода T функции f , а функция ε наследует её основной период.

Под периодической функцией нескольких переменных будем понимать следующий математический объект.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется периодической с периодом \mathbf{T} , если существует вектор $\mathbf{T}_0 \neq 0$, что для всех $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = f(\mathbf{r})$. Период \mathbf{T}_0 наименьшего модуля, сонаправленный с вектором \mathbf{T} ,

назовём основным периодом функции в направлении \mathbf{t} , где $\mathbf{T} = |\mathbf{T}|\mathbf{t}$.

Как показано в статье [3], множество периодов P_f любой периодической функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$P_f = \Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1}) \oplus \text{span}(\mathbf{t}_{m_1+1}, \mathbf{t}_{m_1+2}, \dots, \mathbf{t}_{m_1+m_2}),$$

где \mathbf{T}_k – базисные векторы m_1 -мерной решётки [4], \mathbf{t}_k – направления, вдоль которых функция постоянна, и $m_1 + m_2 \leq n$. Связь между базисными векторами решётки периодов периодической функции нескольких переменных и её основными периодами в данном направлении изучена в работе [5]. С помощью невырожденного линейного преобразования $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ аргумента $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ всякую периодическую функцию нескольких переменных можно сделать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным [3]. Таким образом, без ограничения общности, произвольную периодическую функцию n аргументов можно считать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным.

Справедлива следующая теорема [6].

Теорема 1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной по переменной x_i и периодической по этой

переменной с основным периодом T_i , тогда справедливо равенство

$$\int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = S_{T_i}[f] x_i + \varepsilon_i(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $S_{T_i}[f] = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt$ — среднее значение функции f по переменной x_i на отрезке $[0, T_i]$, функция $\varepsilon_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ периодическая по переменной x_i с основным периодом T_i .

Заметим, что если функция $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывна по какой-либо из переменных x_i , то $\varepsilon: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ имеет непрерывную по этой переменной производную и удовлетворяет уравнению $\varepsilon_{x_i} = f(\mathbf{r}) - S_{T_i}[f]$, с условием $\varepsilon(\mathbf{r})|_{x_i=0} = 0$. Однозначная разрешимость этой задачи гарантирует единственность представления (2). Также, если функция $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является постоянной по переменной x_i , то получим уравнение $\varepsilon_{x_i} = 0$, которое при условии $\varepsilon(\mathbf{r})|_{x_i=0} = 0$ имеет решение $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 0$. В противном случае, функция $\varepsilon: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ будет наследовать основной период T_i функции f по переменной x_i .

Пример 1. Рассмотрим непрерывную и 2π -периодическую по переменной z функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вида $(x, y, z) \rightarrow \cos x + \sin y \cos z$. Тогда справедливо

$$\int_0^z f(x, y, t) dt = z \cos x + \cos y \sin z.$$

В обозначениях теоремы 1 получаем

$$S_{T_z}[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x + \sin y \cos z) dz = \cos x, \quad \varepsilon(x, y, z) = \cos y \sin z.$$

Заметим, что функция ε наследует основной период по переменной z подынтегральной функции f .

Прямым следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой по переменной x_i и периодической по этой переменной с основным периодом T_i , тогда частная производная $\partial_{x_i} f$ также является T_i -периодической по переменной x_i .

Далее приведём обобщение теоремы 1, верное для периодической функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с m_1 -мерной решёткой периодов.

Теорема 3. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной по переменным x_1, x_2, \dots, x_{m_1} и периодической с прямоугольной решёткой периодов $\Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1})$, порождённой векторами $\mathbf{T}_i = T_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, m_1$, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{P_{J_{m_1}}} f(t_1, \dots, t_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots, x_n) dt_1 \dots dt_{m_1} = \\ & = \sum_{k=1}^{m_1-1} (-1)^{k-1} \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_k \leq m_1} \prod_{i \in J_{m_1} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} x_i \int_{P_{i_1, \dots, i_k}} S_{J_{m_1} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} [f] dt_{i_1} \dots dt_{i_k} + \\ & \quad + (-1)^{m_1-1} \prod_{i \in J_{m_1}} x_i S_{J_{m_1}} [f] + \varepsilon(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $P_{i_1, \dots, i_k} = [0; x_{i_1}] \times \dots \times [0; x_{i_k}]$ означает i_k -мерный параллелепипед, а $J_{m_1} = \{1, 2, \dots, m_1\}$ – множество индексов, выражение

$$S_{i_1, \dots, i_k} [f] = \frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \dots, \mathbf{T}_{i_k})})} \int_{P_{\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \dots, \mathbf{T}_{i_k})}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$$

задаёт среднее значение функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по переменным x_{i_1}, \dots, x_{i_k} на фундаментальном параллелепипеде $P_{\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \dots, \mathbf{T}_{i_k})}$ решётки $\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \dots, \mathbf{T}_{i_k})$, $\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – периодическая функция с множеством периодов $P_\varepsilon \supseteq \Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \dots, \mathbf{T}_{i_{m_1}})$.

Несмотря на громоздкий вид, формула (3) имеет понятную структуру и напоминает формулу включения-исключения из теории множеств. Рассмотрим её частный случай при $n = 2$ и $m_1 = 2$.

Следствие. Пусть функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной по переменным x и y и периодической с решёткой периодов, порождённой векторами $\mathbf{T}_x = T_x \mathbf{i}$ и $\mathbf{T}_y = T_y \mathbf{j}$, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq t \leq x \\ 0 \leq \tau \leq y}} f(t, \tau) dt d\tau &= \frac{x}{T_x} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T_x \\ 0 \leq \tau \leq y}} f(t, \tau) dt d\tau + \frac{y}{T_y} \iint_{\substack{0 \leq t \leq x \\ 0 \leq \tau \leq T_y}} f(t, \tau) dt d\tau - \\ &- \frac{xy}{T_x T_y} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T_x \\ 0 \leq \tau \leq T_y}} f(t, \tau) dt d\tau + \varepsilon(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является периодической функцией с множеством периодов $P_\varepsilon \supseteq \Lambda(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y)$.

Заметим, что если функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна по переменным x и y , то $\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет непрерывную по этим переменным смешанную производную, и справедливо уравнение

$$\varepsilon_{xy} = f(x, y) - \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} f(t, y) dt - \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} f(x, \tau) d\tau + \iint_{\substack{0 \leq t \leq T_x \\ 0 \leq \tau \leq T_y}} f(x, y) dx dy$$

с условиями

$$\varepsilon(0, y) = \varepsilon(x, 0) = 0.$$

Однозначная разрешимость последней задачи гарантирует единственность представления (4). Также, если функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ представима в виде $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ или является тождественно постоянной, то получим уравнение $\varepsilon_{,xy} = 0$, которое при условии $\varepsilon(0, y) = \varepsilon(x, 0) = 0$ имеет решение $\varepsilon(x, y) = 0$, тогда $P_\varepsilon = \mathbb{R}^2$. В противном случае, функция $\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ наследует двумерную решётку периодов подынтегральной функции f .

Пример 2. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ следующего вида $(x, y) \rightarrow \cos x + \sin y$. Множеством периодов данной функции является решётка, порождённая векторами $\mathbf{T}_1 = \{2\pi; 0\}$ и $\mathbf{T}_2 = \{0; 2\pi\}$. Справедливо равенство

$$\iint_{\substack{0 \leq t \leq x \\ 0 \leq \tau \leq y}} (\cos t + \sin \tau) dt d\tau = y \sin x + x(1 - \cos y).$$

Усреднения по каждой переменной x, y в отдельности и по обоим переменным имеют вид

$$S_x[f] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\substack{0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq \tau \leq y}} (\cos t + \sin \tau) dt d\tau = 1 - \cos y,$$

$$S_y[f] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\substack{0 \leq t \leq x \\ 0 \leq \tau \leq T}} (\cos t + \sin \tau) dt d\tau = \sin x,$$

$$S_{xy}[f] = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq \tau \leq 2\pi}} (\cos t + \sin \tau) dt d\tau = 0,$$

соответственно. Заметим, что функция f представима в виде суммы функций, зависящих по каждой переменной в отдельности, поэтому получено $\varepsilon(x, y) = 0$.

Приведённые выше теоремы интегрального исчисления периодических функций нескольких действительных переменных предполагается применить к исследованию проблемы существования периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных, а также к построению этих периодических решений.

Список литературы

- [1] Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: «Наука и техника». – 1979. – С.744.
- [2] Малютина М.В., Орлов С.С. Периодическое решение обобщённого интегрального уравнения Абея первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. - 2017. - № 4(44). - С.58—69.
- [3] Соколова Г.К. О периодических функциях нескольких действительных переменных // ИТНОУ: Информационные

технологии в науке, образование и управление. - 2018. - № 5(9).
- С.60—65.

[4] Conway J.H., Sloane N.J.A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer-Verlag. – 1999. – P.706.

[5] Соколова Г.К., Орлов С.С. Об основных периодах периодической функции нескольких переменных // Материалы 19-й Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов: «Научная книга». - 2018. - С.294—297.

[6] Соколова Г.К. Периодические функции нескольких действительных переменных // Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции МНСК – 2019. - Новосибирск: ИПЦ НГУ. - 2019. - С.20.

Построение минимальной периодической поверхности с помощью голоморфного отображения из полуплоскости на счетноугольник

Хабарова Е. Л., Колесников И. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: flo-00@mail.ru

Аннотация. В работах Fujimori S., Weber M. получен способ построения трехпериодических минимальных поверхностей в евклидовом пространстве, основанный на формуле Кристоффеля-Шварца для периодических многоугольников на плоскости. Целью данной работы является рассмотрение одного из способов построения периодической минимальной поверхности с помощью голоморфного отображения полуплоскости на области со специальными граничными свойствами.

Ключевые слова: минимальная поверхность, голоморфное отображение, счетноугольник, область с симметрией переноса, полуплоскость.

С помощью метода, описанного Fujimori S., Weber M. [1, 2], можно построить минимальные поверхности в евклидовом пространстве. Они будут трехпериодическими, то есть инвариантными относительно сдвига в трех независимых направлениях.

Метод Fujimori S., Weber M. состоит из двух шагов:

1. Сначала строится минимальная поверхность, определенная на полосе и обладающая некоторыми специальными свойствами, с помощью формулы Кристоффеля-Шварца.
2. Затем эта поверхность отражается относительно вертикальных плоскостей счетное число раз.

Таким образом, полученная минимальная поверхность соответствует отображению, определенному на некоторой римановой поверхности.

В данной работе описан метод построения двухпериодической минимальной поверхности, инвариантной относительно вертикального сдвига и симметрией относительно вертикальной плоскости (или вертикальных плоскостей). На первом шаге строится поверхность, определенная на верхней комплексной полуплоскости, с помощью специального отображения из полуплоскости на счетноугольник.

Определение 1. *Поверхность называется минимальной, если средняя кривизна в каждой точке поверхности равна нулю.*

Теорема 1. [3] *Всякая односвязная минимальная поверхность в \mathbb{R}^3 может быть представлена в виде*

$$X_k(z) = \int_{z_0}^z \varphi_k(\zeta) d\zeta + C_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$, φ_k определяются равенствами:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}h(1 - g^2),$$

$$\varphi_2 = \frac{i}{2}h(1 + g^2),$$

$$\varphi_3 = hg,$$

функции $h, g: D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, g — мероморфна в D , h — голоморфна в D . В каждой точке, в которой функция g имеет полюс порядка m , функция h имеет нуль порядка не ниже, чем $2m$.

Обратно: всякие две функции h, g , удовлетворяющие вышеперечисленным условиям, задают минимальную поверхность

$$X(z) = (X_1(z), X_2(z), X_3(z)).$$

Такое представление минимальной поверхности называют представлением Эннепера–Вейерштрасса.

Рассмотрим минимальную поверхность Σ , определенную на верхней комплексной полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$ функциями

$$h(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta)},$$

$$g(\zeta) = \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2} \right)^{\alpha_k - 1}, \quad 0 \leq \alpha_k \leq 2,$$

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) = 1.$$

Выбор g обусловлен предыдущими работами [4].

Отображение

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta + c_2 = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2$$

переводит верхнюю комплексную полуплоскость на счетноугольник, здесь c_1, c_2 – комплексные постоянные, $a_k^{(0)} \in [0, 2\pi)$ – прообразы вершин счетноугольника на основном периоде, $\alpha_k \pi$ – внутренние углы при этих вершинах.

Определение 2. [5] *Счетноугольником называют односвязную область типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси, граница которой состоит из отрезков прямых и лучей, причем при движении по границе от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ их должно быть конечное число.*

Теорема 2. *Поверхность Σ , построенная выше, является односвязной минимальной поверхностью с одной граничной компонентой, лежащей на конечном количестве вертикальных плоскостей. Эти плоскости пересекаются под углами $(\alpha_k - 1)\pi$ в образах точек a_k . Кроме того, поверхность инвариантна относительно сдвига*

$$\Sigma = L(\Sigma), \quad L(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3 + 2\pi).$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$\Phi_1(z) = \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta, \quad \Phi_2(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{g(\zeta)} d\zeta.$$

Рассмотрим образ интервала $(a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$ при отображениях Φ_1 и Φ_2 . Без потери общности можно считать, что этот интервал при отображении Φ_1 переходит в положительно ориентированный горизонтальный интервал, т.е. g вещественна на этом интервале. Тогда и $\frac{1}{g}$ должна быть вещественной, и Φ_2 переводит интервал $(a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$ так же в положительно ориентированный горизонтальный интервал.

Далее,

$$F(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g(\zeta)} - g(\zeta) \right) d\zeta + i \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g(\zeta)} + g(\zeta) \right) d\zeta$$

– ортогональная проекция Σ на z -плоскость.

Нетрудно показать, что $2F(z) = \overline{\Phi_2(z)} - \Phi_1(z)$. Тогда, поскольку Φ_1, Φ_2 переводят рассматриваемый интервал на отрезок вещественной оси, то и при отображении F интервал $(a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$ переходит в горизонтальный интервал. Из этого следует, что кривая, являющаяся образом интервала $(a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$ при отображении $X(z)$, лежит в плоскости.

Далее рассмотрим интервалы $(a_{k-1}^{(0)}, a_k^{(0)})$ и $(a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$. При отображении $X(z)$ они переходят в плоские кривые γ_1, γ_2 . Покажем, что угол между плоскостями, в которых лежат эти кривые, равен $(\alpha_k - 1)\pi$.

Вектор нормали к поверхности можно записать в виде

$$N(\zeta) = \frac{1}{|g(\zeta)|^2 + 1} (2\operatorname{Re}g(\zeta), 2\operatorname{Im}g(\zeta), |g(\zeta)|^2 - 1).$$

Если $\zeta \in (a_{k-1}^{(0)}, a_k^{(0)})$ или $\zeta \in (a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$, то вектор нормали $N(\zeta)$ находится в плоскости, в которой лежат кривые γ_1 или, соответственно, γ_2 .

Так как аргумент g

$$g(\zeta) = \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2} \right)^{\alpha_k - 1}$$

не меняется, если $\zeta \in (a_{k-1}^{(0)}, a_k^{(0)})$, или $\zeta \in (a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)})$, то очевидно, что эти плоскости расположены вертикально.

Значит, для нахождения угла между плоскостями, достаточно рассмотреть угол между проекциями векторов нормали. Очевидно, когда ζ переходит через $a_k^{(0)}$, проекция вектора нормали поворачивается на угол $(\alpha_k - 1)\pi$.

Инвариантность относительно вертикального переноса является непосредственным следствием инвариантности Φ_1 и Φ_2 относительно сдвига, т.е.

$$\Sigma = L(\Sigma), \quad L(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3 + 2\pi).$$

Пример 1. Пусть $g(\zeta) = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\zeta}{2}\right)}$. Отображение

$$f(z) = c_1 \int_0^z \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\zeta}{2}\right)} d\zeta + c_2 =$$

$$= c_3 \left[\ln \left(\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} - \sqrt{\sin z} \right) + \arcsin \left(\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2} \right) \right] + c_4$$

переводит верхнюю полуплоскость в полуплоскость с исключенными равнобедренными треугольниками с углом при основании $\frac{1}{4}\pi$.

При $z_0 = 0$ соответствующая минимальная поверхность Σ будет параметрически задана уравнениями

$$X_1(z) = \sqrt{2} \ln \left| \cos \frac{z}{2} + \sin \frac{z}{2} + \sqrt{\sin z} \right|,$$

$$X_2(z) = -\sqrt{2} \ln \left| i \left(\cos \frac{z}{2} - \sin \frac{z}{2} \right) + \sqrt{\sin z} \right|,$$

$$X_3(z) = \operatorname{Re} z.$$

Далее полученную поверхность отразим относительно вертикальной оси симметрии, то есть продолжим на нижнюю комплексную полуплоскость (Рис. 1).

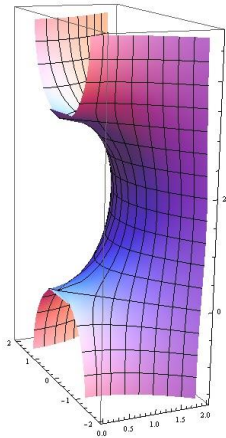


Рис. 1. Продолженная минимальная поверхность

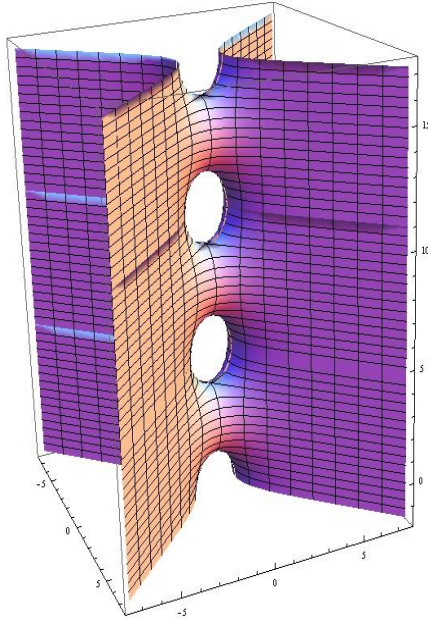


Рис. 2. Минимальная поверхность

Минимальная поверхность на Рис. 2 соответствует полной аналитической функции, то есть функции, полученной после всевозможных аналитических продолжений исходного отображения.

Список литературы

- [1] Fujimori S., Weber M. A construction method for the triply periodic minimal surfaces // *OCAMI Studies*. - V. 3. - 2009. - P.79—90.
- [2] Fujimori S., Weber M. Triply periodic minimal surfaces bounded by vertical symmetry planes // *Manuscripta math.* - 2009. - P.29—53.

- [3] Минимальные поверхности / Кархер Г., Саймон Л. [и др.]; под ред. Оссерман Р.; перевод с английского. – М.: ФИЗМАЛИТ. - 2003. – С.352.
- [4] Хабарова Е. Л., Копанева Л. С. Интеграл Кристоффеля-Шварца на классах отображений с симметрией переноса // Всероссийская конференция по математике и механике: тезисы докл. (Томск, 2-4 окт. 2018 г.). – Томск. - 2018. – С.95—96.
- [5] Копанева Л. С. Геометрические и экстремальные задачи для отображений с симметрией переноса: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. / Л. С. Копанева. – Томск: Томский государственный университет. - 2003. – С.85.

Об одном классе начальных задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в банаховых пространствах⁴

Шеметова В. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск

e-mail: valentina501@mail.ru

Аннотация. В представляемой работе изучена однозначная разрешимость начальной задачи с разрывной начальной функцией для дифференциально-операторного уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. Введено понятие классического решения такой задачи, доказан критерий его существования и единственности. Класс функций, в котором рассматривается задача, расширяется до распределений с ограниченным слева носителем и значениями в банаховом пространстве. Построена фундаментальная оператор-функция абстрактного функционально-дифференциального оператора. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой начальной задачи в указанном классе распределений, и указан явный вид самого обобщенного решения. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых обобщенное решение совпадает с классическим.

⁴ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а

Полученные результаты проиллюстрированы на примере содержательной начально-краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных с запаздыванием по временной переменной.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциально-операторное уравнение, коммутатор операторов, распределение, фундаментальное решение.

Важное прикладное значение в различных областях науки и техники имеют функционально-дифференциальные уравнения, например, в теории автоматического регулирования и автоколебательных систем, проблемах долгосрочного прогнозирования в экономике и медицине. Классы уравнений с отклоняющимся аргументом являются средствами для описания таких свойств реальных физических процессов как динамическая память, последствие, наследственность. Необходимость учета этих свойств естественным образом возникают в связи с тем, что в реальности текущее состояние описываемого объекта определяется не только начальными условиями и текущими возмущениями, но и всеми его предыдущими состояниями от старта до момента наблюдения, т. е. предысторией.

Функционально-дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах сохранили свою актуальность и как аппарат исследования эволюционных уравнений в частных производных, описывающих реальные физические процессы, и как самостоятельные математические объекты. Их исследованию посвящены работы С. Lizama и F. Poblete [1],

A. Ashyralyev, D. Agirseven и В. Сeylan [2], В. Е. Федорова и Е. А. Омельченко [3], М. Laugan [4], Г. В. Демиденко и И. И. Матвеевой [5] и многих других.

Пусть E_1 и E_2 – вещественные банаховы пространства $u = u(t)$ и $f = f(t)$ неизвестная и заданная функции вещественного аргумента со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим класс линейных дифференциальных уравнений

$$Bu'(t) - A_1u(t) - A_0u(t-h) = f(t) \quad (1)$$

где B, A_1, A_0 – замкнутые линейные операторы действующие из E_1 в E_2 , причем $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$, $h > 0$ – заданное число. Для уравнения (1) зададим начальные условия

$$u(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t < 0, \quad u(0) = u_0. \quad (2)$$

Здесь $\varphi(t) \in C([-h, 0]; E_1)$ предполагается известной и определяет решение на отрезке $[-h, 0]$, причем $\varphi(0) \neq u_0$. Задачу (1), (2) можно трактовать как *начальную задачу с начальной функцией и начальным значением*, либо как *начальную задачу с разрывной начальной функцией в точке $t = 0$* .

Определение 1. *Классическим решением начальной задачи (1), (2) будем называть функцию $u(t) \in C([-h, 0] \cup (0, +\infty); E_1) \cap C^1((0, +\infty); E_1)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2).*

Продолжим классическое решение начальной задачи (1), (2) нулем на интервал $(-\infty, -h)$ следующим образом

$$\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t) + \varphi(t)(\theta(t+h) - \theta(t)),$$

тогда в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем начальная задача (1), (2) имеет сверточное представление

$$(B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \quad (3)$$

с правой частью

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t) = B\delta'(t) * \varphi(t)(\theta(t+h) - \theta(t)) + Bu_0\delta(t) - \\ - A_1\varphi(t)(\theta(t+h) - \theta(t)) + f(t)\theta(t), \end{aligned}$$

здесь и далее $\delta(t)$ – функция Дирака, $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Единственным решением в $K'_+(E_1)$ (обобщенным решением начальной задачи (1), (2)), является распределение

$$\tilde{u}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t), \quad (4)$$

где обобщенная оператор-функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет двум условиям

$$\forall v(t) \in K'_+(E_2) \quad B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h) * \varepsilon(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall w(t) \in K'_+(E_1) \quad \varepsilon(t) * B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальным решением* [6] функционально-дифференциального оператора $B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)$. Смысл фундаментального решения состоит в следующем: если известен его вид, то начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение (4), в силу первого

равенства, причем это решение единственно. Действительно, пусть существует $\tilde{v}(t) \in K'_+(E_1)$ такое, что $\tilde{v}(t) \neq \tilde{u}(t)$ и $B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h) * \tilde{v}(t) = \tilde{g}(t)$, тогда, с учетом второго равенства, получим

$$\tilde{v}(t) = \varepsilon(t) * B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h) * \tilde{v}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t) = \tilde{u}(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения сверточного уравнения (3) в классе $K'_+(E_1)$.

Введем в рассмотрение специального вида оператор-функцию

$$V(t) = e^{-A_1 B^{-1} t} A_0 B^{-1} e^{A_1 B^{-1} t},$$

где $e^{A_1 B^{-1} t}$ – операторная экспонента. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [7] данная оператор-функция $V(t)$ представима рядом

$$V(t) = A_0 B^{-1} + [A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}] \frac{t}{1!} + [[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}] \frac{t^2}{2!} + \\ + \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

здесь и далее $[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}] = A_0 B^{-1} A_1 B^{-1} - A_1 B^{-1} A_0 B^{-1}$ – коммутатор линейных операторов $A_0 B^{-1}$ и $A_1 B^{-1}$. Так как $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$, то по теореме о замкнутом графике $A_0 B^{-1}$ и $A_1 B^{-1}$ являются ограниченными линейными операторами из E_2 в E_2 , и указанный ряд является равномерно сходящимся на любом компакте $[0, T]$. Заметим, что операторы

$V(t)$ и $A_1 B^{-1}$ удовлетворяют уравнению Лакса [8] с начальным условием

$$V'(t) = [V(t), A_1 B^{-1}], \quad V(0) = A_0 B^{-1}.$$

Теорема 1. Пусть оператор B является непрерывно обратимым, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)$ имеет вид

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{A_1 B^{-1}(t-kh)} U_k(t-kh) \theta(t-kh),$$

здесь $\{U_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — операторно-функциональная последовательность, заданная рекуррентным соотношением

$$U_k(t) = \int_0^t V(s) U_{k-1}(s) ds, \quad U_0(t) = I_2,$$

I_1 и I_2 — тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно.

Доказательство теоремы сводится к непосредственной проверке определения фундаментального решения с использованием дифференциальных соотношений и асимптотических формул $U'_k(t) - [U_k(t), A_1 B^{-1}] = U_{k-1}(t) A_0 B^{-1}$,

$$U_{k-1}(t) \sim (A_0 B^{-1})^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t \rightarrow 0,$$

для членов операторно-функциональной последовательности $\{U_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Замечание 1. Пусть суперпозиция операторов $A_0 B^{-1}$ и $A_1 B^{-1}$ коммутативна, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)$ имеет вид

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{A_1 B^{-1}(t-kh)} (A_0 B^{-1})^k \frac{(t-kh)^k}{k!} \theta(t-kh).$$

Следствие 1. Пусть $f(t) \in C([0, +\infty); E_2)$, и выполнены условия теоремы 1, тогда начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \varphi(t)(\theta(t+h) - \theta(t)) + B^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} [e^{A_1 B^{-1}(t-kh)} U_k(t-kh) B u_0 \theta(t-kh) + \\ & + \int_0^{t-kh} e^{A_1 B^{-1}(t-kh-s)} U_k(t-kh-s) f(s) ds \theta(t-kh) + \\ & + \int_{-h}^0 e^{A_1 B^{-1}(t-(k+1)h-s)} U_k(t-(k+1)h-s) A_0 \varphi(s) ds \theta(t-kh) + \\ & + \int_{(k+1)h}^t e^{A_1 B^{-1}(t-s)} U_k(t-s) A_0 \varphi(s - (k+1)h) ds (\theta(t-kh) - \theta(t-(k+1)h))]. \end{aligned}$$

Данное распределение является регулярным и порождено обычной функцией $u = u(t)$, которая задается кусочно на полуинтервалах $[(k-1)h, kh)$ и при $f(t) \in C([0, +\infty); E_2)$ обладает следующими свойствами: имеет разрыв в точке $t=0$, в точке $t=h$ сильно непрерывна, в остальных точках кратных запаздыванию $t=(k+1)h$, где $k \in \mathbb{N}$, сильно непрерывно

дифференцируема. Если $f(t) \in C^{n-1}([0, +\infty); E_2)$, то функция $u = u(t)$ имеет порядок гладкости n на интервале $(0, +\infty)$, за исключением точек $t = kh$ кратных запаздыванию, в которых порядок ее гладкости равен $k-1$ где $k = 1, \dots, n$. Если $(u_0 - \varphi(0)) \in N(A_0)$, то в этих точках порядок гладкости повышается на единицу. В этом случае $u = u(t)$ обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2), т. е. является классическим решением начальной задачи (1), (2). Обратное тоже верно, и справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f(t) \in C([0, +\infty); E_2)$, тогда чтобы начальная задача (1), (2) имела единственное классическое решение необходимо и достаточно, чтобы $(u_0 - \varphi(0)) \in N(A_0)$.

Свойства классического решения начальной задачи (1), (2) и начальной задачи с начальным условием

$$u(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t \leq 0,$$

где $\varphi(t) \in C([-h, 0]; E_1)$, совпадают при $t > 0$ [9].

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)u'_t(\bar{x}, t) - \alpha \Delta u(\bar{x}, t) - \beta \Delta u(\bar{x}, t - h) = f(\bar{x}, t), \quad \bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ t > 0,$$

с начальными

$$u(\bar{x}, t) = \omega(\bar{x}, t), \quad -h \leq t < 0, \quad u(\bar{x}, t)|_{t=0} = u_0(\bar{x}),$$

и граничными

$$u(\bar{x}, t)|_{\partial\Omega=0} = 0, \quad t > 0.$$

условиями. При $\beta = 0$ данное уравнение называется *уравнением Баренблатта–Желтова–Кочиной* и моделирует динамику давления жидкости, фильтрующей в трещиновато-пористой среде [10]. Полагая

$$E_1 = L_2^0(\Omega) = \{u(\bar{x}) \in L_2(\Omega) : u(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0\}, \quad E_2 = L_2(\Omega);$$

$$B = (\lambda - \Delta), \quad A_1 = \alpha\Delta, \quad A_0 = \beta\Delta,$$

$$D(B) = D(A_1) = D(A_0) = H_0^{l+2}(\Omega) = \{u(\bar{x}, t) \in W_2^{l+2}(\Omega) : u(\bar{x}, t)|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0\}$$

,

сведем рассматриваемую начально-краевую задачу к начальной задаче (1), (2). Здесь $L_2(\Omega)$ – пространство Лебега, $W_2^{l+2}(\Omega)$ – пространство Соболева, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$\Delta\varphi(\bar{x}) - \lambda\varphi(\bar{x}) = 0, \quad \varphi(\bar{x})|_{\partial\Omega=0} = 0.$$

Обозначим λ_i собственные числа оператора Лапласа кратности $d(\lambda_i)$. Известно [11], что спектр $\sigma(\Delta)_i$ оператора Лапласа является отрицательным, счетным, конечнократным и сгущается только к $-\infty$. Обозначим также $\{\varphi_{\lambda_{ij}}\}$, где $i \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, d(\lambda_i)$, ортонормированную в смысле скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций.

Предполагая $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, т. е. непрерывную обратимость оператора $B = (\lambda - \Delta)$, получим в силу замечания 1 вид фундаментального решения

$$\varepsilon(\bar{x}, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{d(\lambda_i)} e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}(t - kh)} \left\langle \cdot, \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \right\rangle \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \frac{(\beta\lambda_i)^k (t - kh)^k}{(\lambda - \lambda_i)^{k+1} k!} \theta(t - kh)$$

,

дифференциального оператора $(\lambda - \Delta)\delta'(t) - \alpha\Delta\delta(t) - \beta\Delta\delta(t - h)$.

Предположим, что выполняется условие $\Delta(\omega(\bar{x}, 0) - u_0) = 0$, тогда решение рассматриваемой начально-краевой задачи принадлежит классу

$C([-h, 0) \cup (0, +\infty); \mathbf{H}_0^{l+2}(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty); \mathbf{H}_0^{l+2}(\Omega))$ и имеет вид

$$u(\bar{x}, t) = \omega(\bar{x}, t), \quad t \in [-h, 0);$$

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, t) = & \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{d(\lambda_i)} \left[\sum_{k=0}^n \left[e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}(t - kh)} \left\langle u_0(\bar{x}), \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \right\rangle \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \frac{(\beta\lambda_i)^k (t - kh - s)^k}{(\lambda - \lambda_i)^k k!} + \right. \right. \\ & + \left. \int_0^{t - kh} e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}(t - kh - s)} \left\langle f(\bar{x}, s), \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \right\rangle \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \frac{(\beta\lambda_i)^k (t - kh - s)^k}{(\lambda - \lambda_i)^{k+1} k!} ds \right] + \\ & + \int_0^{t - (n+1)h} e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}(t - (n+1)h - s)} \left\langle \omega(\bar{x}, s), \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \right\rangle \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \frac{(\beta\lambda_i)^{n+1} (t - (n+1)h - s)^n}{(\lambda - \lambda_i)^{n+1} n!} ds + \\ & + \left. \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-h}^0 e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}(t - kh - s)} \left\langle \omega(\bar{x}, s), \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \right\rangle \varphi_{\lambda_i, j}(\bar{x}) \frac{(\beta\lambda_i)^k (t - kh - s)^{k-1}}{(\lambda - \lambda_i)^k (k-1)!} ds \right], \end{aligned}$$

$$t \in [nh, (n+1)h).$$

Условие $\Delta(\omega(\bar{x},0) - u_0(\bar{x})) = 0$, выполняется тогда и только тогда, когда $\omega(\bar{x},0) = u_0(\bar{x})$, т. е. начальное условие следует задавать

$$u(\bar{x},t) = \omega(\bar{x},t), \quad -h \leq t \leq 0.$$

В заключении отметим, что предлагаемый подход, основанный на теории распределений Соболева–Шварца и концепции фундаментального решения, позволил доказать конструктивные теоремы существования и единственности обобщенного решения начальной задачи (1), (2). Удалось получить необходимые и достаточные условия существования классического решения начальной задачи с начальной функцией и начальным значением. Показано, что эти условия вполне проверяемы, а полученные формулы возможно применять для конкретных интерпретаций задачи (1), (2).

Список литературы

- [1] Lizama C., Pobleto F. A Characterization of well-posedness for abstract Cauchy problems with finite delay // Journal of mathematical analysis and applications. - 2018. - № 1(457). - P.410—435.
- [2] Ashyralyev A., Agirseven D., Ceylan B. Bounded solutions of delay nonlinear evolutionary equations // Journal of computational and applied mathematics. - 2017. - № 318. - P.69—78.

- [3] Федоров В.Е., Омельченко Е.А. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием // Сибирский математический журнал. - 2012. - № 2(53). - С.418—429.
- [4] Luran M. Existence results for some differential equations with deviating argument // Filomat. - 2011. - № 2(25). - P.21—31.
- [5] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to linear systems of neutral type with several delays // Journal of analysis and applications. - 2014. - № 1&2(12). - P.37—52.
- [6] Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ. – 2002. – P.548.
- [7] Hall B.C. Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction. New York: Springer. – 2015. – P.453.
- [8] Абловиц Д., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М: Мир. – 1987. – С.479.
- [9] Шеметова В.В. Применение теории распределений к дифференциально-операторным уравнениям с запаздыванием // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. - 2018. - №5(9). - С.70—76.
- [10] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикладная математика и механика. - 1960. - № 5(24). - С.58—73.
- [11] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука. – 1973. – С.578.

Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем

Киреенко С. Г., Гриншпон Я.С.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: svkireenko@mail.ru

Аннотация. Не всякое уравнение или неравенство преобразованиями сводится к уравнению или неравенству, имеющему стандартный алгоритм решения. В таких случаях ключевую роль могут сыграть такие свойства функций, входящих в уравнение или неравенство, как область определения (для уравнений и неравенств вместо термина «область определения» принято употреблять термин «область допустимых значений» или «ОДЗ»), непрерывность, ограниченность, четность, монотонность, периодичность и др.

Применение теоретических знаний о свойствах функций в самых порой неожиданных ситуациях позволяет, с одной стороны, более прочно овладеть материалом по теме «Функции», а с другой стороны, научиться переносить знания из одной тематической области в другую.

Ключевые слова: функция, область определения функции, область значений функции, непрерывность, ограниченность, четность, монотонность, периодичность.

Целью данной работы является формирование компетентностного мышления школьников через использование функциональных методов решения задач.

Отметим, что довольно часто использование свойств функций позволяет качественно выполнять задания высокого уровня сложности ЕГЭ по математике, а также различных математических олимпиад и конкурсов, где встречаются нетрадиционные формулировки и предусматриваются нестандартные подходы к решению.

Литературы, в которой бы данный материал был систематизирован и сопровождается достаточным количеством примеров, практически нет, а в большинстве школьных учебников нет даже и упоминания о применении функциональных методов решения задач.

При выполнении работы были поставлены следующие задачи:

1) Изучить и систематизировать функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем.

2) Научить школьников распознавать и решать задачи, в которых является целесообразным использование свойств функций.

3) Создать банк подобных задач и классифицировать их по методам решения.

4) Выпустить методическое пособие по теме, разработать специальный курс для классов физико-математического профиля.

Рассмотрим ряд примеров на применение некоторых функциональных методов.

I. Уравнения, неравенства и системы имеют свою *область допустимых значений (ОДЗ)*, и анализ условий,

определяющих ее, часто является необходимой частью решения. Иногда подобный анализ позволяет существенно сократить количество рассматриваемых случаев и найти решения уравнения (или неравенства) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ, либо доказать, что решений нет.

Задание 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{3x - x^2} = \sqrt{x - 3}.$$

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ 3x - x^2 \geq 0, \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty), \\ x \in [0; 3], \\ x \in [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$x = 3$ — единственное допустимое значение переменной.

Проверим, является ли $x = 3$ корнем уравнения:

$$\sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 - 3} - \sqrt{3 \cdot 3 - 3^2} = \sqrt{3 - 3},$$

$$\sqrt{0} - \sqrt{0} = \sqrt{0} \text{ (верно).}$$

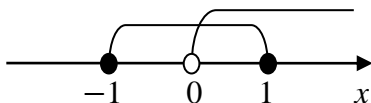
Значит, $x = 3$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x = 3$.

Задание 2. Решите неравенство $\log_5 x < \sqrt{1 - x^2}$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (0; 1].$$

При $x = 1$ получаем: $\log_5 1 = \sqrt{1 - 1}$, т.е. левая часть неравенства равна правой и неравенство не выполняется.

Во всех точках ОДЗ, кроме $x = 1$, верны неравенства $f(x) = \log_5 x < 0$, а $f(x) = \sqrt{1 - x^2} > 0$. Значит, на интервале $(0; 1)$ выполняется неравенство $\log_5 x < \sqrt{1 - x^2}$.

Ответ: $x \in (0; 1)$.

II. При решении уравнений и неравенств свойство *ограниченности* снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль. В этом случае решение основывается на следующих соображениях и утверждениях [1].

Утверждение 1. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Утверждение 2. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений
$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Задание. Решите уравнение $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } 4x - x^2 - 2 > 0.$$

Оценим множители, находящиеся в левой части уравнения.

$$1) \ 0 < 2^{-|x-2|} \leq 1.$$

$$2) 4x - x^2 - 2 = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -(x - 2)^2 + 2 \leq 2;$$

$$3) \log_2(4x - x^2 - 2) \leq \log_2 2 = 1;$$

Из 1) и 3) следует, что исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2^{-|x-2|} = 1, \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-|x-2|} = 2^0, \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0, \\ 4x - x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 8 - 4 - 2 = 2 \text{ (верно)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

III. Из определения *чётной функции* следует, что если $x = c$ является корнем уравнения $f(x) = a$, где $f(x)$ — чётная функция, то и $x = -c$ тоже корень. Следствием этого является то, что уравнение $f(x) = a$ имеет нечётное количество корней тогда и только тогда, когда $x = 0$ является одним из корней уравнения. Аналогично, если количество корней чётно, то $x = 0$ не принадлежит множеству корней.

Чётность может встречаться и в системах уравнений и неравенств. В таких случаях чётность может быть как относительно всех переменных, так и относительно части из них.

Задание [2]. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственную пару решений?

Решение

Данная система уравнений содержит функции четные относительно переменной x . Следовательно, если пара $(x_0; y_0)$ – решение данной системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ также является решением.

Следовательно, если решение единственное, то $x = 0$ является единственным возможным значением переменной x .

$$\begin{aligned} \begin{cases} (|0| + 1)a = y + \cos 0, \\ \sin^2 0 + y^2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = y + 1, \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = a - 1, \\ (a - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; \\ a = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

При найденных значениях параметра пара $(0; y)$ является одним из решений. Проверим, будет ли оно единственным.

1) Пусть $a = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + \cos x = 0, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\cos x, \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\cos x, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили бесконечное количество решений, что противоречит условию задачи.

2) Пусть $a = 2$, тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(|x| + 1) = y + \cos x; \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(|x| + 1) - \cos x, \\ \sin^2 x + (2(|x| + 1) - \cos x)^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(|x| + 1) - \cos x, \\ 4(|x| + 1)^2 = 4(|x| + 1) \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(|x| + 1) - \cos x, \\ |x| + 1 = \cos x. \end{cases}$$

В левой части второго уравнения $|x| + 1 \geq 1$, а в правой $-\cos x \leq 1$.

Значит, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда верна система:

$$\begin{cases} |x| + 1 = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 - \text{единственное решение.}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 2(0 + 1) - \cos 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким образом, пара $(0; 1)$ является единственным решением данной системы при $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

IV. При использовании *монотонности функций* часто применяется теорема о корне и её следствия [3]:

Теорема о корне. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке A , число b – любое из значений, принимаемых $f(x)$ на этом промежутке, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет единственный корень на промежутке A .

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке A , тогда уравнение $f(x) = b$ имеет не более 1 корня на промежутке A .

Следствие 2. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке A , а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Следствие 3. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке A , то уравнение $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in A$, может иметь решение только при $x_1 = x_2$.

Задание 1. Решить уравнение $\log_2(|x - 1| + 1) + \sqrt[3]{(x - 1)^2} = 2$.

Решение

Каждая из двух функций $f(x) = \log_2(|x - 1| + 1)$ и $g(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ убывает при $x \leq 1$ и возрастает при $x \geq 1$, следовательно, уравнение $f(x) + g(x) = 2$ имеет не более двух корней, причем $x_1 \in (-\infty; 1], x_2 \in [1; \infty)$, где x_1, x_2 - возможные корни уравнения.

$x = 0$ — корень уравнения, так как $\log_2 2 + \sqrt[3]{1} = 2$,

$x = 2$ — корень уравнения, так как $\log_2 2 + \sqrt[3]{1} = 2$.

Как доказано выше, уравнение имеет не более двух корней.

Ответ: $x \in \{0; 2\}$

Задание 2 [4]. Найти все значения a , при каждом из которых неравенство $|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$ выполняется для любого x .

Решение. Неравенство преобразуется к виду

$f(x) > 3$, где $f(x) = |x + 1| + 2|x + a| + 2x$.

Точки (-1) и $(-a)$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при любом раскрытии модуля). На левом интервале ($x \leq -1, x \leq -a$) функция принимает вид $f(x) = -x - 2a - 1$ и является убывающей. На правом промежутке ($x \geq -1, x \geq$

$-a$) функция имеет вид $f(x) = 5x + 2a + 1$ и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки (-1) и $(-a)$ являются точками излома, поэтому в одной из этих точек функция принимает наименьшее значение.

Значит, все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} f(-1) > 3, \\ f(-a) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1 + a| - 2 > 3, \\ |-a + 1| - 2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - 1| > \frac{a}{2}, \\ |a - 1| > 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow a < -1,5.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1,5)$.

Без использования свойств функций решение подобных заданий может оказаться весьма затруднительным (сложным технически), а порой и невозможным.

Список литературы

- [1] Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ. Пособие по математике. Мн.: ООО «Асар». - 2002.
- [2] Диагностические работы и тексты пробных ЕГЭ по математике 2015-2018 гг. // <http://alexlarin.net/>.
- [3] Шарьгин И.Ф., Голубев В.И. Математика: решение задач: 11 кл. М.: Просвещение. - 2007.
- [4] Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2012. Функция и параметр // <http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.html>.

Подходы к решению логических задач на уроках математики и информатики

Галанова Н. Ю., Кондабаева Т. А.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: galanova@math.tsu.ru, ata-88@inbox.ru

Аннотация. Современные подходы к обучению требуют, в первую очередь, развития личностных качеств ученика, его мышления и творческих способностей. Справиться с этим позволит внедрение в обучение математики логических задач, благодаря которым развивается логическое мышление. Решение задач с логическим содержанием способствует не только успешному освоению математики и информатики, но и пониманию любой точной науки. Задачи с логическим содержанием – это задачи, с которыми ребенок сталкивается не только на математике и информатике, но и на других уроках; в жизни часто возникают ситуации, требующие логического решения, установление причинно-следственных связей, умозаключений.

Ключевые слова: логическая задача, преподавание математики и информатики в школе.

С помощью решения логических задач обучающемуся прививаются навыки работы с математическими объектами, логику мышления, которая необходима в исследовательской деятельности во всех точных науках. Быстрые темпы развития

вычислительной техники помогают разнообразию типов логических задач и способов их решения.

Так что же такое «логическая задача»?

У большей части детей развитие здравого смысла происходит быстрее, чем осваивается математика. Поэтому у школьников всегда присутствует высокий интерес к решению логических задач, так как для их решения не нужна особая математическая подготовка, не требуется производить вычисления. В таких задачах создана ситуация, максимально приближенная к жизни, решение которой возможно найти путём здравых рассуждений, то есть, с помощью логических рассуждений. Но ни в одном источнике не даётся строгого определения логической задачи. Логическими мы будем считать задачи таких типов: на упорядочивание множества; на нахождение соответствия между элементами одного или различных множеств; задачи на высказывания с различными истинностными значениями; задачи на переправы и взвешивание, турнирные задачи.

Решая и составляя задачи с логическим содержанием обучающий развивает мыслительный аппарат в большей мере, чем решая тривиальные задачи по алгоритму. Эти задачи тренируют скорее память обучающихся. В результате педагогической практики был разработан следующий алгоритм составления логической задачи:

П.1. Выбираются объекты задачи, описываются условия, в которые эти объекты помещены.

П.2. Составляется полная картина произошедших событий.

П.3. Формируется задача путём исключения какой-то информации или она намеренно искажается.

П.4. Формулируется сама задача. В случае недостатка информации или очевидности решения вводятся дополнительные логические условия.

П.5. Проверяется возможность решить задачу с помощью рассуждений. Полученный единственный непротиворечивый ответ означает, что задача составлена верно. Иначе, нужно перейти к П.6.

П.6. В составленном условии не хватает информации, либо имеющаяся информация противоречиво искажена. Изменяем или дополняем условие задачи, после чего необходимо вернуться к П.5.

Пример составления задачи по алгоритму:

Объекты: автоконцерны «Toyota», «Nissan», «Renov».

Исходная информация: через месяц прекращается выпуск автомобилей «Renov».

Для составления задачи искажаем информацию, делая ее логически противоречивой. В газетах появились противоречивые сообщения:

«Toyota»: прекращает свою работу «Nissan».

«Nissan»: прекращает свою работу «Renov».

«Renov»: прекращает свою работу «Toyota».

Записываем условие задачи: Представители «Toyota», «Nissan» и «Renov» выступили с экстренными сообщениями:

«Toyota»: прекращает свою работу «Nissan».

«Nissan»: прекращает свою работу «Reno».

«Reno»: прекращает свою работу «Toyota».

Какой автоконцерн не будет выпускать автомобили, если прекращает свою работу только один из них и известно, что один завод сообщил правду, а два солгали?»

Рассмотрев три варианта, легко понять, что однозначного ответа нет. Поэтому обращаемся к 6 пункту алгоритма.

Уточним имеющуюся информацию: во-первых, допускаем, что лгут все газеты, и, во-вторых, дополнительно изменяем сообщение концерна «Nissan»: «Reno» не прекращает свою работу». Возвращаемся к предыдущему пункту.

Поэтому, прекращает свою работу автоконцерн «Reno». Это ответ.

Возможность составлять задачи с логическим содержанием позволяет расширить воспитательные возможности учителя, ведь при составлении задач дети опираются на свой жизненный опыт и психологический подтекст. Задачи возможно использовать как повод для бесед.

Решаются задачи с логическим содержанием различными методами. В зависимости от метода решения выделяют следующие виды логических задач [1]:

- Задачи, решаемые методом рассуждений;
- Задачи, решаемые методом графа;
- Задачи, решаемые с помощью кругов Эйлера;
- Задачи, решаемые с помощью таблиц истинности;
- Задачи, решаемые методом равносильных преобразований.

При внедрении логических задач в школьный курс необходимо учитывать ряд факторов: начальный уровень подготовки обучающихся, их психологические и возрастные особенности. Особый интерес вызывают задачи, решаемые сразу несколькими методами, вот одна из таких задач: Катя, Аня и Лена купили три билета: в кино, на рок-концерт и в театр. Лена не увлекается громкой музыкой. Аня не любит рок-концерты, а от просмотра кинофильмов у нее быстро устают глаза. Куда отправилась каждая из девочек? [2]

Решение задачи с помощью графа. По условию легко выявить два множества: девочки и купленные билеты. Каждое множество состоит из трёх элементов, которые мы обозначим первыми буквами. Вершинами графа будут элементы этих множеств (рисунок1).

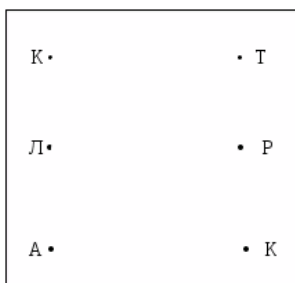


Рис. 1. Граф, иллюстрирующий первоначальные условия задачи

Изобразим условия задачи, для этого проведём отрезки, если есть связь между элементами и пунктиром, если связи нет.

В задаче сказано, что Лена не увлекается громкой музыкой, поэтому Лена не пойдёт на рок-концерт. Проведём пунктирный отрезок между «Л» и «Р». Аня не любит рок-

концерты, а от просмотра кинофильмов у нее быстро устают глаза, поэтому проведём пунктиром отрезки между «А» и «Р», «А» и «К» (рисунок 2.).

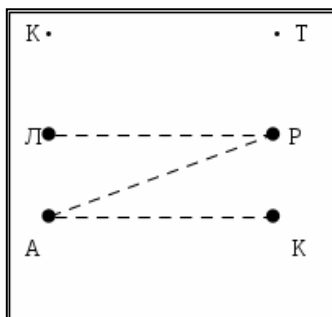


Рис. 2. Граф на первом этапе решения задачи

Вершина «Р» соединена пунктиром с двумя вершинами, поэтому можно провести сплошной отрезок от «Р» до «К», таким образом, Катя пойдёт на рок-концерт. Тогда Катя не сможет пойти ни в кино, ни в театр. Проводим пунктир между «К» и «Т», «К» и «Л» (рисунок 3.).

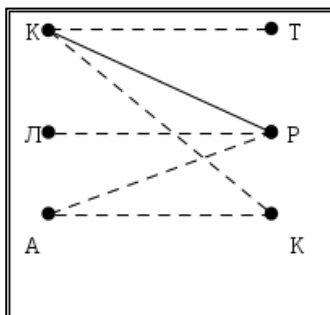


Рис. 3. Граф на третьем этапе решения задачи

Вершина «К» (кино) соединена пунктиром с «К» и «А», поэтому соединим её с отрезком «Л». Таким образом, Лена пойдёт в кино. Значит, Ане остаётся посетить театр. Отрезки на графе иллюстрируют ответ (рисунок 4).

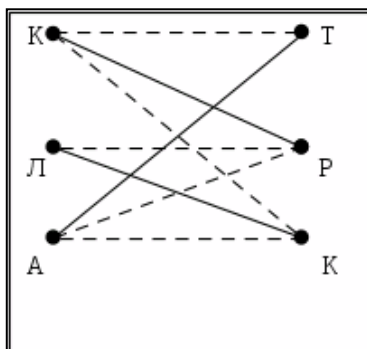


Рис. 4. Граф, иллюстрирующий ответ

Выше была сказано, что эту задачу возможно решить, как минимум двумя способами. Решим задачу методом таблиц.

Решение задачи методом таблиц. По условию в задаче выделены два множества: девочки и билеты. Каждое из множеств состоит из трёх элементов, поэтому составим таблицу, состоящую из трёх столбцов (множество девочек) и трёх строк (множество мест).

По условию, Лена не любит громкую музыку, поэтому она точно не пойдёт на рок-концерт, поэтому внесём «минус» в соответствующую ячейку. Так как Аня не любит рок-концерты, а от просмотра кинофильмов у нее быстро устают глаза, заполним «минусом» клетки (таблица 1):

Таблица 1. Таблица на первом этапе решения задачи.

	Катя	Лена	Аня
театр			
рок-концерт		-	-
кино			-

Столбец «Аня» имеет лишь одну свободную ячейку, поэтому Аня пойдёт в театр, поэтому. Катя и Лена не идут в театр, ставим «минус» в соответствующие ячейки (таблица 2):

Таблица 2. Таблица на втором этапе решения задачи.

	Катя	Лена	Аня
театр	-	-	+
рок-концерт		-	-
кино			-

В столбце «Лена» осталась не заполненной лишь одна строка, поэтому Лена посетит театр, тогда Катя сможет посетить рок-концерт. Решение задачи наглядно представлено в таблице (табл. 3).

Таблица 3. Таблица на третьем этапе решения задачи.

	Катя	Лена	Аня
театр	-	-	+
рок-концерт	+	-	-
кино	-	+	-

Введение в обучение математике задач с логическим содержанием позволяет формировать и развивать познавательные УУД как основу умений учиться. При решении и составлении задач с логическим содержанием дети учатся проводить классификацию и сравнение исходя из заданных критериев; учатся проводить анализ объектов, выделять существенные и несущественные признаки; дети учатся установлению причинно-следственных связей, построению рассуждений об объектах; устанавливают аналогии, обобщают, основываясь на выявлении связей.

Список литературы

- [1] <https://logiclike.com/math-logic/reshaem-zadachi>
- [2] Богомолова О. Б. Логические задачи. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2013. - С.277.

Математические задачи на уроках географии в школе

Нынь Е.А., Лазарева Е. Г.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: nynea8616@mail.ru, lazareva@math.tsu.ru

Аннотация. В работе представлены некоторые задачи по географии для основной школы (5 – 9 класс), которые обеспечивают межпредметные связи между математикой и географией. Описаны необходимые математические навыки для решения этих задач, показана актуальность решения подобных задач как во время изучения материала, так и в период повторения изученного в 9-м классе, изучены возможности использования этих задач для создания методического комплекса заданий «Математические задачи на уроках географии». Отмечается, что многие математические понятия появляются при изучении географии раньше, чем в математике, и учителям математики рекомендуется этим пользоваться.

Ключевые слова: преподавание географии, межпредметные связи математики и географии.

Математические навыки необходимы для изучения географии в школе, начиная со среднего звена основной школы, до её окончания. В 5-м, 6-м, 7-м классах дети знакомятся с такими понятиями, как географические координаты, масштаб, азимут, амплитуда, атмосферное давление и так далее. Успешное освоение материала во многом зависит от понимания

математических понятий и методов. Математические методы применяются и при подготовке детей к ГИА по географии. Так, в варианте ЕГЭ из 34 заданий вычислений или работы с числовой информацией требуют 13. Из 7 заданий с развернутым ответом таких заданий 5. В варианте ОГЭ из 30 заданий таких заданий 6. Это говорит о значительных связях математических знаний и навыков с географическими. Поэтому решение географических задач математическими методами – это актуально для современной школы. С другой стороны, при изучении географии учащиеся сталкиваются с объектами и понятиями, которые позже превращаются в математические объекты и термины [1]. Поэтому осознанное, заинтересованное отношение к географии способствует успешному освоению математики в школе.

Задача нашей работы – выделить из географического материала, изучаемого в основной школе, задания, которые можно сформулировать в виде задач, требующих знания математических операций, понятий и методов, описать необходимый математический инструментарий для решения этих задач и оценить, насколько такие задачи поддаются тиражированию для создания полноценного учебного пособия на тему «Математические задачи на уроках географии». Для определенности мы будем ориентироваться на УМК авторов Е. М. Домогацких, Н. И. Алексеевского [2].

Географические понятия изучаются в основной школе постепенно. Так, уже в пятом классе идет речь об ориентировании на местности и определении сторон света с

точностью до румбов, говорится о шаровидной форме Земли и представлении земной поверхности с помощью карт, однако работа с картами (масштаб, азимут) начинается в шестом классе. Пожалуй, именно эти понятия – первые, которые связывают географию и математику в школе. Для решения задач на определение расстояний и азимута по карте ученикам требуется математический навык работы с пропорциями и нахождения углов с помощью транспортира.

Задача 1. Определить расстояние, направление и азимут при движении от пункта А до родника (см. рис.1) [3]

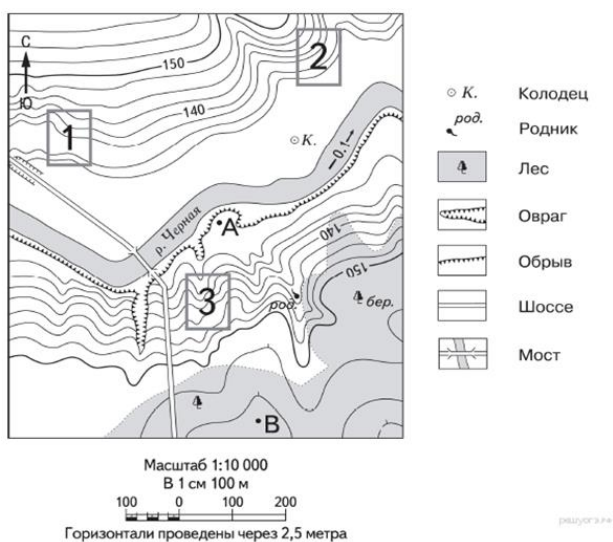


Рис. 1. Иллюстрация к задаче 1

Задача 1 решается в 6 классе с помощью линейки и транспортира. Такие задачи наверняка станут интереснее, если предложить учащимся карты местности, которая им знакома,

или дать им возможность самостоятельно выбрать территории и объекты на топографической карте. Безусловно, задача поддается тиражированию и способствует знакомству учащихся с окружающим миром и краеведением.

В шестом классе на уроках географии школьники, возможно, впервые встречаются с функциональными зависимостями и их графическим изображением – раньше, чем в математике. К примеру, суточное изменение температуры воздуха и зависимость температуры от высоты над поверхностью Земли. Здесь вполне уместны задачи на нахождение средних значений: среднесуточная, среднемесячная температура, причем возможно использование графика.

Кроме температуры, речь может идти об атмосферном давлении. Для решения таких задач ученикам необходимы навыки арифметических действий с десятичными дробями и умение разложить задачу на элементарные вычислительные шаги.

Задача 2. Известно, что на высоте 2205 метров над уровнем моря атмосферное давление составляет 550 мм ртутного столба. Определите атмосферное давление на высоте:
а) 3255 метров над уровнем моря; б) 0 метров над уровнем моря (см. рис. 2) [4].

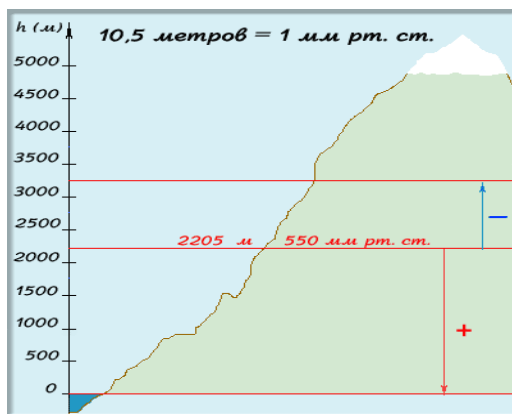


Рис.2. Иллюстрация к задаче 2

Задача 2 позволяет давать разные числовые данные и использовать информацию о местности и условиях, в которых проживают учащиеся. Учитывая наличие высотных домов в городах, можно задавать вопрос какое давление будет на N -ом этаже, если на первом 760 мм. рт. столба? На каком этаже давление будет равно 750 мм. рт. столба (1 этаж приблизительно равен 3 м. по высоте)?

Седьмой класс посвящен изучению физической географии материков и океанов. Учебный материал изобилует числовой информацией: высоты и глубины географических объектов, длины рек и горных систем, площади островов и океанов и, конечно, географические координаты. Геометрические знания и навыки, которыми овладевают обучающиеся в 7 классе, позволяют им решать задачи, связанные с понятием высоты солнца над горизонтом.

Задача 3. Определите географическую широту города, если известно, что в дни равноденствия солнце в полдень стоит над горизонтом на высоте 63° (тень падает на юг) [5].

Для понимания того, о чем говорит задача 3, учащийся самостоятельно может сделать чертеж (см.рис.3) и применить теорему о сумме углов треугольника и признак подобия треугольников.

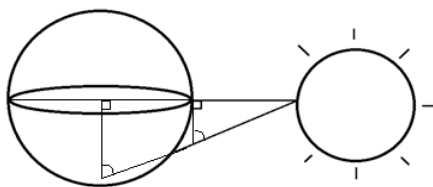


Рис.3. Иллюстрация к задаче 3

В восьмом классе подробно изучается физическая география Российской Федерации. Здесь учащиеся впервые сталкиваются с понятием часовых поясов – ограниченных двумя меридианами частей земного шара шириной 15° , в пределах которых время суток одинаково. С другой стороны, в каждой точке поверхности вводится солнечное (астрономическое) время – время на меридиане, проходящем через эту точку. Наконец, приводится карта часовых поясов, установленных на территории Российской Федерации, и говорится про декретное время, которое на 1 час больше поясного. Совершенно уместны в этом случае задачи на местное время, правда, в них не учитывается карта часовых поясов. С точки зрения математики

эти задачи просты: нужно только не забыть, что каждые 24 часа меняются сутки и помнить про линию перемены дат.

Задача 4. На 30° восточной долготы среда, 1 января, 18 часов местного времени. Какой день недели, число и время на 180 меридиане [6]?

Наконец, в девятом классе учащиеся знакомятся с экономической и социальной географией России и сопредельных государств. Большой простор для задач математического содержания дает тема «Численность населения». Эти задачи связаны с такими понятиями, как Общий прирост (ОП), естественный прирост (ЕП), миграционный прирост (МП), рождаемость (Р), смертность (С), коэффициенты рождаемости и смертности (K_r и K_c). Отдельно стоит отметить понятие промилле (‰) – количество тысячных долей, которое используется наряду с понятием процент (%). Так, коэффициент рождаемости измеряется в промилле: отношение числа родившихся к общей численности населения, умноженное на 1000.

Задача 5. Как изменится за год численность населения посёлка, если в начале 2018 года в нём проживало 14476 человек, в течение года умерло 173 человека, рождаемость составила 11 %, годовое сальдо миграции составило –28 человек [7]?

Задачи 3, 4, 5 также позволяют генерировать различные модификации, причем привязывать их к определенной местности. Таким образом, каждая из приведенных выше задач

может рассматриваться как опорная для множества задач на данную тему. При этом задачи становятся интереснее для учащихся, если привязывать их к региону проживания учащихся [8] либо к достопримечательным географическим объектам. Ясно, что есть и другие географические задачи математического содержания. Наше исследование показывает, что связи между математикой и географией в школе достаточно разнообразны и не всегда очевидны. Мы предлагаем учителям географии использовать подобные задачи не только в соответствующих разделах при изучении географии, но и в девятом классе с целью повторения пройденного материала, осознания межпредметных связей между географией, математикой, физикой, биологией, химией [9]. Кроме того, мы считаем, что использование задач математического содержания на уроках географии разовьет не только географические компетенции учащихся, но и их математические навыки, что активно используется некоторыми педагогами [10]. В процессе отбора задач мы не раз отмечали, что в географии некоторые математические понятия встречаются раньше, чем в математике. Такое предварительное знакомство с понятием координат, средних величин, процентов, функциональных зависимостей методически выигрышно для преподавания математики, ведь учитель математики может привести пример из географии, поясняющий абстрактную математическую идею. По-видимому, учителям стоит активнее пользоваться этой возможностью.

Список литературы

- [1] Фридман Л. М. Учитесь учиться математике. – М. : Просвещение. - 1985.
- [2] Домогацких Е. М., Алексеевский Н. И. и др. География. Учебник для 9 класса. М.: «Русское слово». - 2015.
- [3] ОГЭ-2018. География. Типовые экзаменационные варианты. Под ред. Э.М. Амбарцумовой. М: Национальное образование. - 2018.
- [4] Мультиурок. Измерение атмосферного давления [Электронный ресурс] URL: <https://multiurok.ru/files/izmiereniie-atmosfiernogho-davlienii-a-opyt-torr-1.html>
- [5] Олимпиадные задачи по географии. Высота солнца и широта. [Электронный ресурс]. URL: <https://koncept.ru/srednie-klassy/olimpiadi/700-olimpiadnye-zadachi-po-geografii-vysota-solnca-i-shirota.html>
- [6] Алгоритм решения задач по определению поясного и местного времени [Электронный ресурс]. URL: <https://infourok.ru/zadachi-na-nahozhdenie-poyasnogo-i-mestnogo-vremeni-po-geografii-2074940.html>
- [7] Мультиурок. Решение демографических задач [Электронный ресурс]. URL: <https://multiurok.ru/files/riesheniie-diemoghrafichieskikh-zadach.html>
- [9] Ковшов С.В. Краеведение как один из способов повышения эффективности учебного процесса // Вопросы образования. - 2009. - № 1. - С.211—223.
- [9] Бунятова Л.Ф., Пурлиева А.Х., Гурбанов А.А. Интегрирование содержания школьных учебных предметов как

средство формирования целостности знаний // Актуальные проблемы современного образования. - 2018. - № 1. – С.137—141.

[10] Тауткеева А.А. Использование в обучении математике межпредметных связей с географией // Актуальные проблемы современного образования. - 2017. - № 1 (22). - С.111—115.